INGENIEUR-ARCHIV

UNTER MITWIRKUNG VON

A. BETZ · A. HERTWIG · K. KLOTTER
E. SCHMIDT · E. SÖRENSEN

HERAUSGEGEBEN VON

R. GRAMMEL

XVI. BAND ERSTES HEFT 1947

SPRINGER-VERLAG · BERLIN UND HEIDELBERG

INGENIEUR-ARCHIV

XVI. BAND ERSTES HEFT 1947

Nach zweijähriger Unterbrechung erscheint das „Ingenieur-Archiv" wieder mit dem hier beginnenden XVI. Band. Der vorangegangene XV. Band ist infolge der Zeitereignisse auf sein 1. Heft (Seite 1—64) beschränkt geblieben.

Die Erklärung des Problems der hohen Sprengfestigkeit umlaufender Scheiben.

Von **R. Grammel** in Stuttgart.

1. Einleitung. Die durch Messungen einwandfrei gesicherte Tatsache, daß die Sprengfestigkeit umlaufender Scheiben ungefähr anderthalb- bis zweieinhalbmal so groß ist wie die Zerreißfestigkeit des gleichen Werkstoffes beim Zugversuch, hat unter den Fachleuten einen nun fast fünfzig Jahre andauernden Streit der Meinungen[1] verursacht, beginnend mit den Auseinandersetzungen zwischen *M. Grübler* und *C. Bach*, und fortgeführt durch die Abhandlungen von *O. Mohr*, *A. Martens*, *M. Enßlin*, *G. v. Doepp*, *G. Schlesinger*, *C. Krug*, *H. Schlechtweg*, *H. Pamler* und anderen. Da die Erscheinung zuerst an Schleifscheiben, also bei nichtmetallischen Werkstoffen beobachtet worden ist, so hat man versucht, etwaige Abweichungen vom Hookeschen Gesetz für sie verantwortlich zu machen. Man hat sie auch durch „Hypothesen ad hoc" zu deuten sich bemüht. Eine befriedigende Erklärung ist aber bis heute keineswegs gelungen.

Die Grundgesetze der Festigkeitslehre, sei es mit dem Hookeschen oder einem allgemeineren Ansatz, lassen keinen wesentlichen Unterschied zwischen der Festigkeit des Sprengversuchs und des Zerreißversuchs zu, weil in beiden Fällen das Überschreiten der gleichen Zugspannung den Werkstoff zerstören muß. Man könnte dabei höchstens geltend machen, daß beim Zerreißen im Zugversuch der Werkstoff einem eindimensionalen Spannungszustand unterworfen ist, beim Sprengen der umlaufenden Scheibe aber einem zweidimensionalen. Das macht indessen, wie ich zum Schlusse in Ziff. 4 nachweisen werde, selbst im äußersten Falle nur wenige Hundertstel aus und reicht demnach zur Erklärung der auffallenden Erscheinung bei weitem nicht hin. Da man an den Grundlagen der Elastomechanik nicht zweifeln kann, so ist also zu vermuten, daß allen bisherigen Überlegungen über dieses Problem ein grundsätzlicher Denkfehler anhaftet. Ich glaube diesen Fehler entdeckt zu haben und will den scheinbaren Widerspruch im folgenden lösen.

2. Die Mechanik des Sprengversuchs. Wenn eine Scheibe, die wir als überall gleichdick voraussetzen wollen, mit der Drehgeschwindigkeit ω umläuft, so treten infolge der Fliehkraft in ihr positive Ringspannungen σ_φ und positive Radialspannungen σ_r auf, deren Verlauf über dem Halbmesser aufgetragen durch Abb. 1 schematisch wiedergegeben wird: die größte Spannung ist stets die Ringspannung σ_{φ_0} am Innenrand der Scheibe.

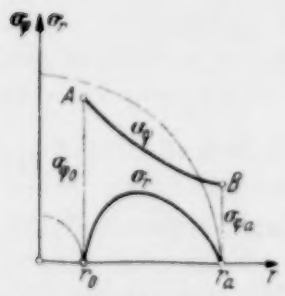

Abb. 1.

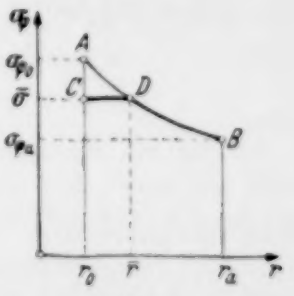

Abb. 2.

Man hat nun meines Wissens bisher immer den Schluß gezogen: Sobald σ_{φ_0} die Zerreißfestigkeit $\bar{\sigma}$ des Werkstoffes erreicht oder übersteigt, müßte die Scheibe zerspringen; da sie aber erst bei einem (berechneten) σ_{φ_0} zerspringt, das etwa das Doppelte der Zerreißfestigkeit $\bar{\sigma}$ ist, so ist ihre Sprengfestigkeit etwa doppelt so groß wie die Zerreißfestigkeit ihres Werkstoffes.

Dies ist ein Trugschluß. Denn wenn die Scheibe so rasch umläuft, daß die innere Ringspannung σ_{φ_0} rechnerisch größer ist als die Zerreißfestigkeit $\bar{\sigma}$, die äußere Ringspannung $\sigma_{\varphi a}$ aber noch kleiner bleibt als $\bar{\sigma}$ (Abb. 2), so daß es einen Wert $\bar{r}$ zwischen Innenhalbmesser r_0 und Außen-

[1] Die Einzelheiten dieses Streites und die geschichtliche Entwicklung des Problems sind übersichtlich dargestellt bei *H. J. Krug*, Das Festigkeitsverhalten spröder Körper bei gleichförmiger und ungleichförmiger Beanspruchung. Diss. Stuttgart 1938, S. 35.

halbmesser r_a gibt, für welchen $\sigma_\varphi = \bar{\sigma}$ wird, so bedeutet das einfach, daß nunmehr der innere Teil der Scheibe (von $r = r_0$ bis $r = \bar{r}$) in den plastischen Bereich oder möglicherweise sogar schon in den Bruchbereich eingetreten ist, wogegen ihr äußerer Teil (von $r = \bar{r}$ bis $r = r_a$) sich immer noch im elastischen Bereich, jedenfalls also noch unterhalb der Bruchgrenze des Werkstoffes befindet. Es besteht keinerlei Grund dafür, daß die Scheibe jetzt schon zerspringt. Denn der äußere Teil der Scheibe hält ja gewiß immer noch, selbst wenn der innere Teil der Scheibe schon völlig zerstört wäre.

Um einen naheliegenden Einwand hier gleich zu entkräften, sei bemerkt, daß die Kurve AB in Abb. 2 keineswegs mit der Kurve AB in Abb. 1 identisch zu sein braucht; die Kurve CDB in Abb. 2, die allein physikalische Bedeutung hat, muß neu berechnet werden unter der Annahme, daß der Scheibenteil von r_0 bis $\bar{r}$ etwa schon im plastischen, der Teil von $\bar{r}$ bis r_a noch im elastischen Bereich liegt, und dann wird natürlich im allgemeinen die Kurve DB nicht mehr ein Stück der Kurve AB von Abb. 1 sein.

Der bisher stets gemachte Trugschluß ist wohl darauf zurückzuführen, daß man die Zerreißfestigkeit $\bar{\sigma}$ verwechselt hat mit der Sicherheitsgrenze σ_{φ_s}. Aus Gründen der Sicherheit wird man die Scheibe im praktischen Betrieb allerdings höchstens so schnell umlaufen lassen, daß σ_{φ_s} nicht größer als $\bar{\sigma}$ wird; denn ein Eintritt in den Plastizitäts- oder gar Bruchbereich ist natürlich für alle Teile der Scheibe zu verbieten, weil diese dadurch dauernd geschädigt würde – zerspringen würde sie aber darum noch lange nicht.

Ein Grund zum wirklichen Zerspringen der Scheibe besteht erst in dem Augenblick, wo der Punkt $\bar{r}$ ganz nahe bei r_a liegt und also die Zerreißfestigkeit $\bar{\sigma}$ gegen den jetzt noch vorhandenen Wert der Ringspannung am Außenrand der Scheibe rückt (der aber keineswegs mit dem Wert $\sigma_{\varphi a}$ von Abb. 1 übereinstimmen wird). Wir wollen diesen Wert jetzt berechnen.

3. Die Zerreißspannung. Um die tatsächliche Zerreißspannung zu ermitteln, machen wir die Voraussetzung, daß die Scheibe unmittelbar vor dem Bruch ganz plastisch geworden sei. Diese Voraussetzung stimmt allerdings nur bei Werkstoffen, die einen rein plastischen Bereich vor dem Bruch besitzen; für andere Stoffe wird die folgende Rechnung nur noch qualitative Bedeutung haben, also nur noch das Grundsätzliche des Vorgangs wiedergeben, doch ist (nach Erfahrungen bei anderen Problemen dieser Art) anzunehmen, daß auch bei ihnen zahlenmäßig dem Ergebnis kein allzu großer Fehler anhaftet.

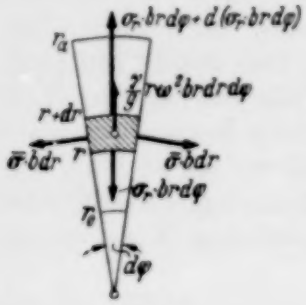

Abb. 3.

Für ein Scheibenelement von der Breite dr und dem Zentriwinkel $d\varphi$ hat man bei einer Scheibendicke b die in Abb. 3 eingetragenen Kräfte, nämlich 1) die Radialkräfte $\sigma_r\,b\,r\,d\varphi$ und $\sigma_r\,b\,r\,d\varphi + d(\sigma_r\,b\,r\,d\varphi)$, 2) die Ringkräfte $\bar{\sigma}\,b\,dr$ mit einer nach innen gerichteten Radialkomponente $\bar{\sigma}\,b\,dr\,d\varphi$, wobei also $\bar{\sigma}$ die Ringspannung ist, die der Werkstoff (etwa als Plastizitätsspannung) unmittelbar vor dem Bruch gerade noch aufzunehmen fähig ist, und 3) die Fliehkraft $(\gamma/g)\,r\omega^2 \cdot b\,r\,dr\,d\varphi$, wobei γ/g die Stoffdichte ist; und somit lautet die Gleichgewichtsbedingung

$$d(r\sigma_r)\,b\,d\varphi + \frac{\gamma}{g}\,\omega^2\,b r^2\,dr\,d\varphi = \bar{\sigma}\,b\,dr\,d\varphi$$

oder

$$\bar{\sigma}\,dr - d(r\sigma_r) = \frac{\gamma}{g}\,\omega^2 r^2\,dr\,. \tag{1}$$

Man integriert dies über die ganze Scheibenstärke von $r = r_0$ bis $r = r_a$ und beachtet dabei, daß $\bar{\sigma}$ ein fester Wert ist, und daß σ_r und also auch $r\sigma_r$ an beiden Scheibenrändern verschwindet. So kommt

$$\bar{\sigma}\,(r_a - r_0) = \frac{\gamma}{g}\,\frac{\omega^2}{3}\,(r_a^3 - r_0^3)$$

oder nach Division mit $(r_a - r_0)$

$$\bar{\sigma} = \frac{\gamma}{g}\,\frac{\omega^2}{3}\,(r_a^2 + r_a r_0 + r_0^2). \tag{2}$$

Ist nun $\bar{\sigma}$ die Zerreißfestigkeit des Werkstoffes (eigentlich die Plastizitätsspannung, die er aufnehmen kann, und die wir im Rahmen unserer Voraussetzungen hier gleich der Zerreißfestigkeit setzen dürfen), so bedeutet ω in (2) die Drehgeschwindigkeit, bei der die Scheibe tatsächlich springt.

Diese Zerreißfestigkeit $\bar{\sigma}$ vergleichen wir jetzt mit der zu dieser selben Drehgeschwindigkeit ω gehörenden rechnerischen Höchstspannung σ_{φ_0}, welche so ermittelt ist, wie wenn die Scheibe bis dahin im elastischen Bereich gelaufen wäre, und welche man bisher irrtümlicherweise als Sprengspannung der Scheibe ansehen zu sollen glaubte (weil man nicht bedachte, daß σ_{φ_0} nur eine auf fiktiver Grundlage berechnete, aber keine im Augenblick des Bruches tatsächlich vorhandene Spannung ist). Dieser längst aus der Theorie der umlaufenden Scheiben bekannte Wert σ_{φ_0} gehorcht mit der Querdehnzahl ν der Formel[1]

$$\sigma_{\varphi_0} = \frac{\gamma}{g}\frac{\omega^2}{4}\left[(3+\nu)\,r_a^2 + (1-\nu)\,r_0^2\right]. \tag{3}$$

Aus (2) und (3) ergibt sich das Verhältnis $p = \sigma_{\varphi_0}/\bar{\sigma}$ der beiden Festigkeitswerte zu

$$p = \frac{3}{4}\,\frac{(3+\nu)\,r_a^2 + (1-\nu)\,r_0^2}{r_a^2 + r_a r_0 + r_0^2} \tag{4}$$

oder mit $\nu = 1/3$ und dem Scheibenparameter $\varrho = r_a/r_0$ dimensionslos geschrieben

$$p = 2{,}5\,\frac{\varrho^2 + 0{,}2}{\varrho^2 + \varrho + 1}\,. \tag{5}$$

Die Größe p, welche angibt, das Wievielfache die angebliche „Sprengfestigkeit" $\sigma_{\varphi 0}$ von der tatsächlichen Zerreißfestigkeit $\bar{\sigma}$ ist, wird durch Abb. 4 abhängig vom Scheibenparameter ϱ dargestellt. Man erkennt, daß in der Tat σ_{φ_0} das Doppelte von $\bar{\sigma}$ erreichen und sogar bis zum Zweieinhalbfachen von $\bar{\sigma}$ ansteigen kann. Damit ist das Paradoxon der hohen Sprengfestigkeit der Scheiben ganz allein aus den Grundgesetzen der Festigkeitslehre erklärt.

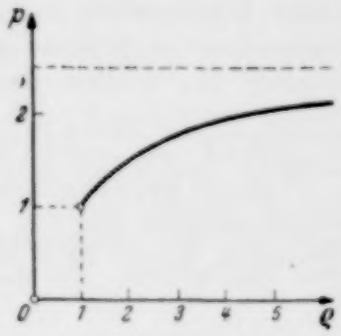

Abb. 4.

Eine experimentell nachprüfbare Folgerung dieser Erklärung besteht darin, daß, wie Abb. 4 zeigt, der Faktor p für Scheiben mit großer Bohrung (ϱ klein) kleiner ist als für solche mit kleiner Bohrung (ϱ groß), wenn man den Außenhalbmesser beibehält. Diese Folgerung wird durch die Sprengversuche von *Whitcomb*[2] tatsächlich bestätigt. Allerdings möchte ich ausdrücklich betonen, daß ich den Werten von Abb. 4 nur qualitative Bedeutung beimesse, da die Rechnung ja völlige Plastizität der Scheibe beim Bruch voraussetzte; eine sehr genaue zahlenmäßige Übereinstimmung mit den Sprengversuchen darf man nicht ohne weiteres erwarten.

Schreibt man die Hauptformel (2) mit $\varrho = r_a/r_0$ und mit der Sprenggeschwindigkeit $v_a = r_a\omega$ in der Form

$$v_a^2 = \frac{3\,g\,\bar{\sigma}}{\gamma}\,\frac{\varrho^2}{\varrho^2 + \varrho + 1}\,, \tag{6}$$

so besteht eine weitere, experimentell nachprüfbare Folgerung darin, daß die Sprenggeschwindigkeit v_a unabhängig vom Außenhalbmesser r_a ist, falls man r_a und r_0 gleichzeitig so variiert, daß das Verhältnis ϱ unverändert bleibt. Auch diese Folgerung wird durch die Versuche von *Whitcomb* gut bestätigt.

4. Der Einfluß des zweidimensionalen Spannungszustandes. Nun muß noch ein in Ziff. 1 angedeutetes Bedenken entkräftet werden. Bei solchen Werkstoffen, für welche man als Maß der Zerreißfestigkeit nicht die größte Spannung anzusehen hat, die der Werkstoff aushält, sondern die größte bezogene Formänderungsarbeit, die er aufzunehmen fähig ist, kann die Zerreißfestigkeit des zweidimensionalen Spannungszustandes (umlaufende Scheibe) sehr wohl größer sein als die Zerreißfestigkeit des eindimensionalen (beim Zerreißversuch), da die beiden Spannungen des zweidimensionalen Spannungszustandes, wenn sie beide Zugspannungen sind, infolge der Querzusammenziehung, die jede erzeugt, sich gegenseitig in der Dehnung und also auch in der Arbeitsleistung behindern. Wir wollen uns aber davon überzeugen, daß dies viel zu wenig ausmacht, um den (in Ziff. 3 wirklich enthüllten) Unterschied zwischen Zerreiß- und Sprengfestigkeit zu erklären.

---

[1] Siehe z. B. *C. B. Biezeno* und *R. Grammel*, Technische Dynamik, S. 626 [zweite Formel (6) mit (7) und (5) sowie $\sigma_0 = \sigma_a = 0$].

[2] *K. F. Whitcomb*, Grits and Grinds 1930 (zitiert nach *H. J. Krug*, a. a. O. S. 40).

Die bezogene Formänderungsarbeit eines eindimensionalen Spannungszustandes σ_1 (Zerreißversuch) ist mit dem Elastizitätsmodul E

$$\mathfrak{L} = \frac{\sigma_1^2}{2E},$$

diejenige des zweidimensionalen Spannungszustandes σ_φ, σ_r (Sprengversuch)

$$\mathfrak{L} = \frac{1}{2E}(\sigma_\varphi^2 + \sigma_r^2 - 2\nu\sigma_\varphi\sigma_r).$$

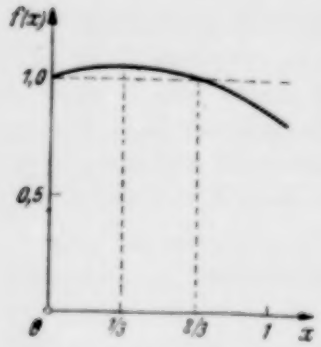

Abb. 5.

Setzt man jetzt $\sigma_r = x\sigma_\varphi$, wo x ein in der Scheibe veränderlicher Faktor ist, und setzt die beiden Ausdrücke $\mathfrak{L}$ einander gleich, so folgt

$$\sigma_\varphi = \sigma_1 \cdot f(x) \quad \text{mit} \quad f(x) = 1/\sqrt{1 + x^2 - 2\nu x}. \tag{7}$$

Die Funktion $f(x)$, deren Verlauf Abb. 5 für $\nu = 1/3$ zeigt, ist im Intervall $0 < x < 2\nu$ größer als 1 und erreicht bei $x = \nu$ ihren Höchstwert

$$f(x)_{\max} = \frac{1}{\sqrt{1-\nu^2}} = 1{,}06. \tag{8}$$

Wie Abb. 1 erkennen läßt, ist jedenfalls für die inneren Teile der Scheibe die Radialspannung σ_r nur ein kleiner Bruchteil der Ringspannung σ_φ, somit $x < 2\nu$ und also dort $f(x) > 1$, so daß dort nach (7) sicherlich $\sigma_\varphi > \sigma_1$, d. h. die „Sprengfestigkeit" σ_φ des zweidimensionalen Spannungszustandes der Scheibe größer als die Zerreißfestigkeit σ_1 des eindimensionalen Spannungszustandes des Werkstoffes ist. Aber es ist äußerstenfalls $\sigma_\varphi = 1{,}06\,\sigma_1$, also σ_φ um höchstens 6 % größer als σ_1, und auch das nur in gewissen inneren Teilen der Scheibe, keinesfalls an ihrem Innenrand, wo immer noch $x = 0$ bleibt, und wo doch der Bruch beginnen muß.

Nun gilt aber bei vielen Werkstoffen als Maß der Festigkeit nicht die bezogene Formänderungsarbeit, sondern nur der Teil von ihr, den man bezogene Gestaltänderungsarbeit nennt, und der allgemein durch den Ausdruck [1]

$$\mathfrak{L}_g = \frac{1}{12G}\left[(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2\right]$$

dargestellt wird, wo G den Schubmodul und $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ die drei Hauptspannungen eines dreidimensionalen Spannungszustandes bedeuten. Dies gibt für den eindimensionalen Spannungszustand mit $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$

$$\mathfrak{L}_g = \frac{\sigma_1^2}{6G},$$

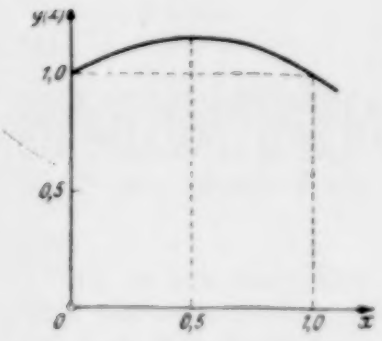

Abb. 6.

für den zweidimensionalen der Scheibe mit $\sigma_1 = \sigma_\varphi$, $\sigma_2 = \sigma_r$, $\sigma_3 = 0$

$$\mathfrak{L}_g = \frac{1}{6G}(\sigma_\varphi^2 + \sigma_r^2 - \sigma_\varphi\sigma_r).$$

Setzt man wieder $\sigma_r = x\sigma_\varphi$, so kommt jetzt

$$\sigma_\varphi = \sigma_1 \cdot g(x) \quad \text{mit} \quad g(x) \quad 1/\sqrt{1 + x^2 - x}. \tag{9}$$

Die Funktion $g(x)$, deren Verlauf Abb. 6 zeigt, ist im Intervall $0 < x < 1$ größer als 1 und erreicht bei $x = 1/2$ ihren Höchstwert

$$g(x)_{\max} = \sqrt{\frac{4}{3}} = 1{,}15. \tag{10}$$

Da in der ganzen Scheibe $x < 1$ ist, so ist nach (9) wiederum $\sigma_\varphi > \sigma_1$, aber äußerstenfalls $\sigma_\varphi = 1{,}15\,\sigma_1$. Die beobachtete höhere Sprengfestigkeit ließe sich mithin auch auf diese Weise keineswegs erklären.

(Eingegangen am 21. November 1944.)

[1] Vgl. *C. B. Biezeno* und *R. Grammel*, a. a. O. S. 31.

Die Tensorwaage.

Von **W. Klafke** in Friedrichshafen.

1. Einleitung. Die Größen der Physik lassen sich in Skalare und Vektoren einteilen. Skalare (wie Zeit, Arbeit, Temperatur) sind bekanntlich durch Angabe ihres Betrages völlig bestimmt, während die Vektoren (wie Kraft, Geschwindigkeit, Beschleunigung) außerdem noch die Angabe ihrer Richtung verlangen. Zwischen Skalaren und Vektoren sind nun verschiedenartige Beziehungen möglich; so kann ein Skalar von einem Skalar (z. B. die Temperatur von der Zeit) oder von einem Vektor (z. B. die Arbeit von der Kraft) abhängen, ebenso kann sich ein Vektor mit einem Skalar (z. B. die Geschwindigkeit mit der Zeit) oder mit einem Vektor (z. B. die Beschleunigung mit der Kraft) ändern. Während die ersten drei Funktionen kaum Schwierigkeiten bieten, erfordert das Rechnen mit den Funktionen der Vektoren unter sich, den Vektorfunktionen, sobald man von den allgemeinen Symbolen zur zahlenmäßigen Bestimmung schreitet, meist einen beträchtlichen Aufwand, so daß schon oft Versuche unternommen wurden, durch graphische Methoden die Anschauung zu fördern und die Auswertung zu erleichtern. Hervorzuheben sind hier besonders der Spannungskreis bzw. Dehnungskreis von *Mohr*, den auch *Culmann*, *Rötscher* und *Jaschke* behandelten, und der Trägheitskreis von *Mohr* und *Land*, der bei *Westergaard*, *Dose* und *Osgood-Sturm* in anderer Form erscheint. Hier soll ein neues Hilfsmittel auf diesem Gebiet, die Tensorwaage, beschrieben werden. Zuvor wird jedoch kurz auf die Haupteigenschaften der wichtigsten Vektorfunktionen eingegangen.

2. Grundlagen. a) Affinoren. Wie im Bereich der Zahlen die lineare Abhängigkeit $y = a\,x + b = \lambda\,(x)$ zweier Veränderlicher x und y voneinander den einfachsten Fall einer Funktion darstellt (abgesehen von der Konstanten), so gibt es auch im Bereich der Vektoren den Begriff der linearen Funktion $\mathfrak{v}_1 = \Phi\,\mathfrak{v}_2$; darunter versteht man die lineare Abhängigkeit jeder Komponente (Koordinate) des einen Vektors von allen Komponenten des anderen. Beschränkt man sich auf die Ebene, dann sind also die Vektoren

$$\mathfrak{v}_1 = x_1\,\mathfrak{i} + y_1\,\mathfrak{j} \quad \text{und} \quad \mathfrak{v}_2 = x_2\,\mathfrak{i} + y_2\,\mathfrak{j}$$

durch die Gleichungen

$$x_1 = \alpha_1 x_2 + \beta_1 y_2, \quad y_1 = \alpha_2 x_2 + \beta_2 y_2$$

miteinander verknüpft. Ihre konstanten Koeffizienten werden oft in Form einer Matrix

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \beta_1 \\ \alpha_2 \beta_2 \end{pmatrix} = \Phi$$

als Symbol der Funktion benutzt. Aus der analytischen Geometrie ist nun bekannt, daß diese Gleichungen auch eine homogene lineare Transformation definieren, durch die eine affine Abbildung der Ebene unter Beibehaltung des Nullpunktes erfolgt, d. h. eine solche Verzerrung der Ebene, daß Geraden gerade bleiben. Daher wird eine lineare Vektorfunktion als Affinor bezeichnet, im vorliegenden Fall speziell als planarer (ebener) Affinor. Nach Wahl des Richtungsvektors (Einheitsvektor in Richtung φ) $\mathfrak{v}_2 = \cos\varphi \cdot \mathfrak{i} + \sin\varphi \cdot \mathfrak{j}$ als Argumentenvektor kann man den Vektor $\mathfrak{v}_1$ als Funktion von φ auffassen und nach den Methoden der Analysis leicht die Winkel finden, für die der Betrag des abhängigen Vektors einen Größt- oder Kleinstwert erreicht, sowie die extremen Beträge selbst an diesen Stellen ermitteln. Es ergibt sich

$$\varphi \quad \frac{1}{2}\,\operatorname{arc\,tg}\,2\,\frac{\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - \beta_1^2 - \beta_2^2},$$

und

$$(v_1)_{extr} = \sqrt{\frac{1}{2}\,(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \beta_1^2 + \beta_2^2) \pm \frac{1}{2}\,\sqrt{(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - \beta_1^2 - \beta_2^2)^2 + 4\,(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2)^2}};$$

das sind Richtung und Größe der Hauptachsen der durch die affine Transformation aus dem Einheitskreis hervorgegangenen Ellipse. Mit einer kleinen Umformung des Vektors $\mathfrak{v}_1$

$$\begin{aligned} \mathfrak{v}_1 &= x_1\,\mathfrak{i} + y_1\,\mathfrak{i} = (\alpha_1 x_2 + \beta_1 y_2)\,\mathfrak{i} + (\alpha_2 x_2 + \beta_2 y_2)\,\mathfrak{j} \\ &= x_2\,(\alpha_1\,\mathfrak{i} + \alpha_2\,\mathfrak{i}) + y_2\,(\beta_1\,\mathfrak{i} + \beta_2\,\mathfrak{j}) = x_2\,\mathfrak{a} + y_2\,\mathfrak{b} \end{aligned}$$

lassen sich die Ergebnisse etwas einfacher schreiben:

$$\varphi = \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} 2 \frac{(a\,b)}{a^2 - b^2}$$

und

$$(v_1)_{extr} = \sqrt{\frac{1}{2}(a^2 + b^2) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(a^2 - b^2)^2 + 4(a\,b)^2}}.$$

Eine besonders kennzeichnende Eigenheit linearer Vektorfunktionen ist die Tatsache, daß die algebraische Summe der Komponenten (Projektionen) zweier Funktionsvektoren v_1, $\bar{v}_1$ auf ihre senkrecht aufeinander stehenden Argumentenvektoren v_2, $\bar{v}_2$ konstant ist, und zwar gleich

$$\frac{(v_1\,v_2)}{v_2} + \frac{(\bar{v}_1\,\bar{v}_2)}{\bar{v}_2} = \alpha_1 + \beta_2.$$

b) Tensoren. Treten bei der affinen Verzerrung der Ebene nur sehr kleine Verformungen auf, so gelangt man zum ebenen Verzerrungszustand der Elastizitätslehre. Dieser Verzerrungszustand in einem Flächenpunkt, wie er durch eine geringe Scherung des Achsenkreuzes in Abb. 1 um γ

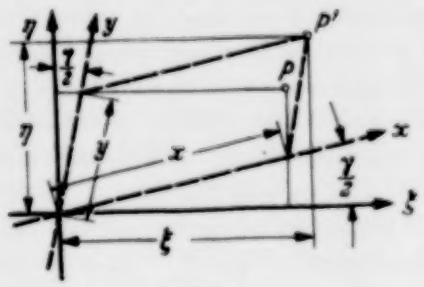

Abb. 1.

$$\xi = x_2 \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) + y_2 \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right),$$

$$\eta = x_2 \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) + y_2 \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)$$

und durch geringe Dehnungen in Achsenrichtung um ε_x und ε_y

$$u = (1 + \varepsilon_x)\,\xi,$$
$$v = (1 + \varepsilon_y)\,\eta$$

verursacht wird, führt zu folgenden Transformationsgleichungen:

$$x_1 = x_2(1 + \varepsilon_x)\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) + y_2(1 + \varepsilon_x)\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right),$$

$$y_1 = x_2(1 + \varepsilon_y)\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) + y_2(1 + \varepsilon_y)\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right),$$

die sich mit $\cos(\gamma/2) = 1$ und $\sin(\gamma/2) = \gamma/2$ und durch Vernachlässigung kleiner Produkte höherer Ordnung zu

$$x_1 = x_2 + x_2\varepsilon_x + y_2\left(\frac{\gamma}{2}\right),$$

$$y_1 = y_2 + x_2\left(\frac{\gamma}{2}\right) + y_2\varepsilon_y$$

vereinfachen. Dem Verzerrungsvektor eines Flächenpunktes entspricht also ein planarer symmetrischer Affinor

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma \\ \frac{1}{2}\gamma & \varepsilon_y \end{pmatrix} \quad \text{(Hauptdiagonale = Symmetrieachse),}$$

anzuwenden auf den Richtungsvektor. Da der Spannungsvektor des ebenen Spannungszustandes einer ähnlichen Funktion

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau \\ \tau & \sigma_y \end{pmatrix}$$

genügt, werden solche symmetrische Affinoren als Tensoren bezeichnet.

Jeden Affinor kann man in einen symmetrischen Tensor und einen gegensymmetrischen Axiator zerlegen:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \frac{1}{2}(\beta_1 + \alpha_2) \\ \frac{1}{2}(\alpha_2 + \beta_1) & \beta_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}(\beta_1 - \alpha_2) \\ \frac{1}{2}(\alpha_2 - \beta_1) & 0 \end{pmatrix}$$

Der Tensor bewirkt dabei die eigentliche Deformation, während der Axiator im wesentlichen eine Rotation der Tensor-Ellipse hervorruft. (Der Axiator muß verschwinden, wenn die Airysche

Spannungsfunktion existieren soll, so wie der Rotor eines Vektors verschwindet, wenn dieser der Gradient eines Potentials sein soll.) Eine Translation ist wegen des Fehlens der absoluten Glieder in den Transformationsgleichungen ausgeschlossen.

Wird in den Formeln für Richtung und Größe der Hauptwerte der Affinoren $a_2=\beta_1=\gamma$ und für a_1 und β_2 nur a und β gesetzt, so gilt nach einigen Umformungen für die Tensoren:

$$\varphi=\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{2\gamma}{a-\beta}, \tag{1}$$

$$(v_1)_{extr}=\frac{a+\beta}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{(a-\beta)^2+4\gamma^2}\ ; \tag{2}$$

a und β bedeuten, wie oben gezeigt wurde, Dehnungen der Ebene in Richtung der Achsen des betrachteten rechtwinkligen Systems, γ eine Scherung der gleichen Achsen. Durch diese drei Zahlen ist also ein Tensor bestimmt. Damit lassen sich auch Dehnung und Scherung in einem um einen bekannten Winkel gedrehten Achsenkreuz berechnen. Der meßtechnisch meist schwer zu ermittelnde Wert γ läßt sich durch eine dritte Dehnung a' unter dem Winkel φ ersetzen:

$$\mathfrak{v}_1=(a\cos\varphi+\gamma\sin\varphi)\,\mathrm{i}+(\gamma\cos\varphi+\beta\sin\varphi)\,\mathrm{j},$$
$$\mathfrak{v}_2=\cos\varphi\cdot\mathrm{i}+\sin\varphi\cdot\mathrm{j}.$$

Die Projektion des Vektors $\mathfrak{v}_1$ auf $\mathfrak{v}_2$ ist

$$\frac{(\mathfrak{v}_1\mathfrak{v}_2)}{v_2}=a'=(a\cos\varphi+\gamma\sin\varphi)\cos\varphi+(\gamma\cos\varphi+\beta\sin\varphi)\sin\varphi,$$

und daraus folgt

$$4\gamma^2=\frac{(a'-a\cos^2\varphi-\beta\sin^2\varphi)^2}{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}.$$

Weiterhin ist leicht zu erkennen, daß für $\beta'\perp a'$ die Beziehung $a'+\beta'=a+\beta$ gilt. Als Radialkomponente r (Projektion auf den Richtungsvektor) des Vektors

$$\mathfrak{v}_1=r\,(\cos\varphi\,\mathrm{i}+\sin\varphi\,\mathrm{j})+t\,(-\sin\varphi\,\mathrm{i}+\cos\varphi\,\mathrm{j})$$

ergibt sich allgemein zu

$$r=\frac{(\mathfrak{v}_1\mathfrak{v}_2)}{v_2}=\frac{a+\beta}{2}+\frac{a-\beta}{2}\cos 2\varphi+\gamma\sin 2\varphi,$$

und als Tangentialkomponente

$$t=\frac{(\mathfrak{v}_1\bar{\mathfrak{v}}_2)}{\bar{v}_2}=\frac{a-\beta}{2}\sin 2\varphi+\gamma\cos 2\varphi.$$

Die Radialkomponente erreicht ihre Extrema an der gleichen Stelle und mit der gleichen Größe wie der Vektor $\mathfrak{v}_1$ selbst (beim allgemeinen Affinor nicht); die Tangentialkomponente besitzt Extrema in dem dazu winkelhalbierenden Achsenkreuz, und zwar von der Größe

$$(t)_{extr}=\pm\sqrt{(a-\beta)^2+4\gamma^2},$$

verschwindet dagegen in den Hauptrichtungen. Bezieht man daher die Komponenten auf das Hauptachsenkreuz, so ist mit $a=r_{max}$, $\beta=r_{min}$, $\gamma=0$

$$r=\frac{1}{2}(r_{max}+r_{min})+\frac{1}{2}(r_{max}-r_{min})\cos 2\varphi',$$

$$t=\frac{1}{2}(r_{max}-r_{min})\sin 2\varphi=\frac{1}{2}(t_{max}-t_{min})\sin 2\varphi'.$$

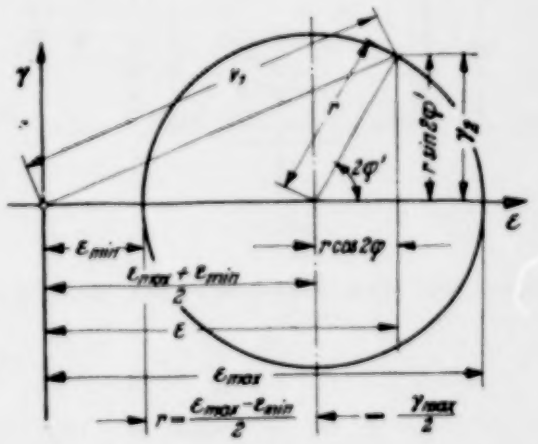

Abb. 2.

c) Darstellungen. Als Beispiel einer graphischen Darstellung des ebenen Verzerrungszustandes zeigt Abb. 2 den Mohrschen Spannungskreis in seiner Deutung als Dehnungskreis. Nach den vorangegangenen Gleichungen spricht die Abbildung für sich. Von diesem Tensor-Kreis unterscheidet sich ein Affinor-Kreis dadurch, daß sein Mittelpunkt um

$$\varrho=\frac{1}{2}(t_{max}+t_{min})\quad\text{(Radius des Axiators)}$$

in Richtung der t-Achse verschoben ist (Abb. 3). Die Gleichungen dieses Kreises in Parameterform lauten

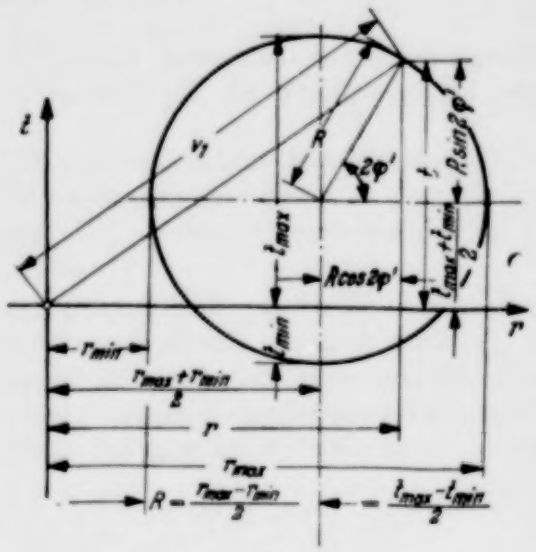

Abb. 3.

$$r = \frac{1}{2}(r_{max} + r_{min}) + \frac{1}{2}(r_{max} - r_{min})\cos 2\varphi',$$

$$t = \frac{1}{2}(t_{max} + t_{min}) + \frac{1}{2}(t_{max} - t_{min})\sin 2\varphi'.$$

Aus den Formeln und Abb. 3 ist sofort zu erkennen: Die Extrema der Radialkomponente und der Tangentialkomponente liegen wie beim Tensor um $\varphi = 45°$ auseinander. Die Maxima und Minima der Tangentialkomponente differieren im Betrage um 2ϱ, während die Radialkomponenten wieder genau mit denen des entsprechenden Tensors übereinstimmen. Die extremen Werte des Vektors $\mathfrak{v}_1$ selbst fallen dagegen weder in Größe noch in Richtung mit den Extremwerten seiner Radialkomponente zusammen. [Zur Erläuterung sei noch hinzugefügt, daß aus einem Spannungstensor ein solcher Spannungsaffinor entstehen würde, wenn zu den Normalkräften und Schubkräften am Flächenelement noch ein Drillmoment (Axiator) hinzutreten könnte. Damit wären dann die Schubspannungen in zwei aufeinander senkrechten Richtungen ungleich.]

Es soll noch eine räumliche Darstellung des Tensors erwähnt werden, weil sie später zum Ausgleichen von mehr als drei gemessenen Tensor-Komponenten benötigt wird. Trägt man nämlich die Radialkomponenten über den zugehörigen Punkten des Tensorkreises auf, so liegen, wie Abb. 4 zeigt, ihre Endpunkte in einer Ebene, wie wenn sie als Dehnungen über dem Kreisquerschnittsumfang eines längs- und biegebeanspruchten Rundstabes gemessen worden wären. (Gleichungen von Ebenen in Zylinderkoordinaten.)

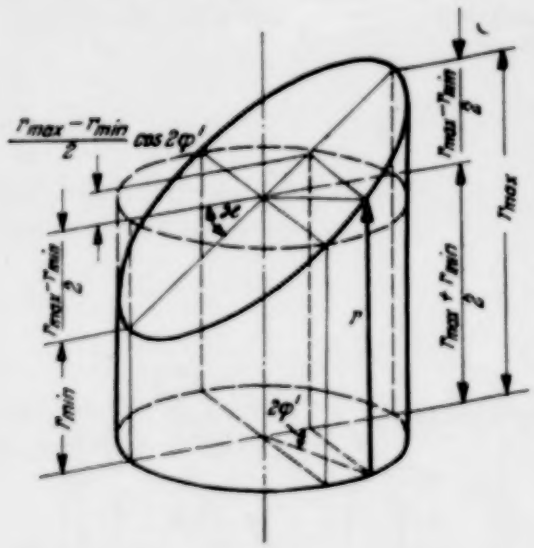

Abb. 4.

d) Beispiel. Es soll ein Fall aus der Praxis herausgegriffen werden, und zwar sollen die Hauptwerte des zweidimensionalen Spannungszustandes in einem Schalenpunkt durch Dehnungsmessungen in mehreren Richtungen bestimmt werden. Dazu sind bekanntlich Messungen in mindestens drei Richtungen erforderlich, für die die Bezeichnungen $\varepsilon_1 : 0°$, $\varepsilon_2 : 45°$, $\varepsilon_3 : 90°$ gewählt werden sollen. Die Formeln (1) und (2) für die Extremwerte eines Tensors liefern nach Ausdrücken von γ durch die dritte Dehnung a' unter $\varphi = 45°$ das Ergebnis

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2a' - a - \beta}{a - \beta},$$

$$v_{\substack{max \\ min}} = \frac{1}{2}(a + \beta) \pm \frac{1}{2}\sqrt{2(a - a')^2 + 2(\beta - a')^2},$$

oder mit den Komponenten des Spannungstensors geschrieben

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3},$$

$$\sigma_{\substack{max \\ min}} = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) \pm \frac{1}{2}\sqrt{2(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + 2(\sigma_3 - \sigma_2)^2}.$$

Die Einführung der gemessenen Dehnungsgrößen wird durch das Hookesche Gesetz vermittelt, das für den ebenen Spannungszustand

$$\sigma_1 = \frac{E}{1 - \nu^2}(\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_3),$$

$$\sigma_2 = \frac{E}{1 - \nu_2}(\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_4),$$

$$\sigma_3 = \frac{E}{1 - \nu^2}(\varepsilon_3 + \nu\varepsilon_1)$$

lautet. Die vierte Dehnung ε_4 kann durch $\varepsilon_1+\varepsilon_3=\varepsilon_2+\varepsilon_4$ entfernt werden. So erhalten wir die endgültigen Formeln

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2\varepsilon_2 - \varepsilon_1 - \varepsilon_3}{\varepsilon_1 - \varepsilon_3},$$

$$\sigma_{\substack{\max\\ \min}} = \frac{E}{2(1-\nu)}(\varepsilon_1+\varepsilon_3) \pm \frac{E}{2(1+\nu)}\sqrt{2(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2+2(\varepsilon_3-\varepsilon_2)^2}.$$

Es ist oft wünschenswert, diese Ergebnisse durch überzählige Messungen zu verbessern. Dabei ist es ohne Zweifel am günstigsten, die Meßrichtungen bzw. Meßstellen möglichst weit auseinanderzurücken, d. h. sie in gleichen Abständen anzuordnen. Werden dann die so gemessenen Dehnungen über den entsprechenden Punkten des Dehnungskreises aufgetragen, so müssen, wie vorhin gezeigt wurde, ihre Endpunkte in einer Ebene liegen, so daß man also durch linearen Ausgleich nach der Methode der kleinsten Quadrate leicht zu den bestmöglichen Werten gelangt. Bei vier Meßrichtungen in 0° (ε_1), 90° (ε_3), 45° (ε_2) und 135° (ε_4) genügt es bekanntlich, die Differenz der Dehnungssummen $\Delta=(\varepsilon_1+\varepsilon_3)-(\varepsilon_2+\varepsilon_4)$ zu gleichen Teilen zu den Meßwerten zu schlagen. Der Ausgleich von sechs oder mehr äquidistanten Meßwerten ist aber auch nicht viel schwieriger.

An Stelle der rechnerischen Auswertung kann man auch aus den drei gemessenen Dehnungen den Dehnungskreis konstruieren und dann auf den Spannungskreis umrechnen, oder es lassen sich die zum Teil graphischen Verfahren nach *Dose* oder *Osgood-Sturm* u. a. anwenden. In jedem Fall aber sind (eventuell neben dem Dehnungsausgleich bei überzähligen Meßwerten) noch einige Größen zu errechnen, aufzutragen oder abzugreifen.

3. Die Tensorwaage. a) Ableitung. Im folgenden wird nun eine einfache mechanische Vorrichtung beschrieben, die — unter Voraussetzung gleichmäßigen Winkelabstandes der Meßstellen — gleichzeitig mit dem Ausgleich der Meßfehler auch die Bestimmung der Hauptwerte des Tensors übernimmt. Zu Beginn sollen diese geforderten Ergebnisse mathematisch formuliert werden.

Es seien in einem Punkte einer Fläche die n Dehnungen ε_i $(i=1, 2, \ldots n)$ in den Richtungen $(\pi/n)(i-1)$ bekannt. Die Gleichung der Ausgleichsebene durch die Endpunkte der über entsprechenden Umfangspunkten des Mohrschen Dehnungskreises errichteten Meßwerte ist allgemein

$$\underbrace{\bar{\varepsilon}_i}_{\substack{\text{Ausgeglichene}\\ \text{Dehnung}}} = \underbrace{\frac{1}{2}(\varepsilon_{\max}+\varepsilon_{\min})}_{\substack{\text{Mittlere}\\ \text{Dehnung } \bar{\varepsilon}}} + \underbrace{\frac{1}{2}(\varepsilon_{\max}-\varepsilon_{\min})}_{\substack{\text{Hauptschiebung}\\ \gamma_{\max}/2}} \cos\underbrace{\left[\alpha+\frac{2\pi(i-1)}{n}\right]}_{\substack{\text{Abweichung von}\\ \text{Hauptdehnungsrichtung}}}.$$

Da sich die gemessene Dehnung ε_i und die ausgeglichene Dehnung $\bar{\varepsilon}_i$ um den Meßfehler v_i unterscheiden, so folgen daraus die n Fehlergleichungen

$$v_i = \bar{\varepsilon} + \frac{\gamma_{\max}}{2}\cos\left[\alpha+\frac{2\pi(i-1)}{n}\right] - \varepsilon_i \qquad (i=1, 2, \ldots n)$$

und deren Quadrate

$$v_i^2 = \bar{\varepsilon}^2 + \frac{\gamma_{\max}^2}{4}\cos^2\left[\alpha+\frac{2\pi(i-1)}{n}\right] + \varepsilon_i^2 + 2\bar{\varepsilon}\frac{\gamma_{\max}}{2}\cos\left[\alpha+\frac{2\pi(i-1)}{n}\right] - 2\bar{\varepsilon}\varepsilon_i - 2\frac{\gamma_{\max}}{2}\varepsilon_i\cos\left[\alpha+\frac{2\pi(i-1)}{n}\right].$$

Berücksichtigt man, daß

$$\Sigma\cos\left[\alpha+\frac{2\pi(i-1)}{n}\right]=0 \quad \text{und} \quad \Sigma\cos^2\left[\alpha+\frac{2\pi(i-1)}{n}\right]=\frac{n}{2}$$

ist, so erhält man als Summe der Fehlerquadrate

$$\Sigma v_i^2 = n\bar{\varepsilon}^2 + \frac{n}{2}\frac{\gamma_{\max}^2}{4} + \Sigma\varepsilon_i^2 - 2\bar{\varepsilon}\Sigma\varepsilon_i - 2\frac{\gamma_{\max}}{2}\Sigma\varepsilon_i\cos\left[\alpha+\frac{2\pi(i-1)}{n}\right].$$

Die partiellen Ableitungen nach den drei Unbekannten $\bar{\varepsilon}$, $\gamma_{max}/2$ und α müssen verschwinden, da die Summe der Fehlerquadrate ja ein Minimum werden soll:

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial \bar{\varepsilon}} = 2n\bar{\varepsilon} - 2\Sigma\varepsilon_i = 0,$$

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial\left(\frac{\gamma_{max}}{2}\right)} = n\frac{\gamma_{max}}{2} - 2\Sigma\varepsilon_i \cos\left[\alpha + \frac{2\pi(i-1)}{n}\right] = 0,$$

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial \alpha} = \gamma_{max}\Sigma\varepsilon_i \sin\left[\alpha + \frac{2\pi(i-1)}{n}\right] = 0.$$

Aus der ersten dieser Gleichungen ergibt sich die mittlere Dehnung

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\Sigma\varepsilon_i}{n},$$

aus der dritten Gleichung (bei $\gamma_{max} \neq 0$) der Winkel zwischen der gewählten Bezugslinie (durch Meßstelle bzw. Meßrichtung ε_1 gegeben) und der Hauptdehnungsrichtung

$$\alpha = -\operatorname{arg\,tg}\frac{\Sigma\varepsilon_i \sin\frac{2\pi}{n}(i-1)}{\Sigma\varepsilon_i \cos\frac{2\pi}{n}(i-1)},$$

und die zweite Gleichung liefert schließlich unter Berücksichtigung des errechneten Winkels die Hauptschiebung

$$\frac{\gamma_{max}}{2} = \frac{2}{n}\sqrt{\left[\Sigma\varepsilon_i \cos\frac{2\pi}{n}(i-1)\right]^2 + \left[\Sigma\varepsilon_i \sin\frac{2\pi}{n}(i-1)\right]^2}$$

Nun sollen die n Meßwerte ε_i (vorerst sämtlich positiv angenommen) nicht mehr wie bisher als Strecken über den zugehörigen Umfangspunkten des Dehnungskreises aufgetragen, sondern dort als Gewichte p_i angeheftet werden. Wird dann die polare Achse der Kreisscheibe waagerecht gelegt und die Bezugslinie der Meßpunkte (durch Meßwert 1) dabei senkrecht gestellt, so übt die Summe der Einzelkräfte p_i auf die Achse eine Kraft $P = \Sigma p_i$ aus. Weil ferner im allgemeinen der Kräfteschwerpunkt S_P der Einzelkräfte p_i nicht mit dem Drehpunkt S_F (Scheibenschwerpunkt) zusammenfällt, tritt auch ein Drehmoment $M = Pe \sin\beta$ auf, zu dessen Bestimmung die Lage des Schwerpunktes S_P, d. h. sein Abstand e vom Drehpunkt S_F und sein Winkel β zur Bezugslinie ermittelt werden muß.

Die Komponenten ξ und η des Schwerpunktabstandes e in Richtung dieser Bezugslinie und senkrecht dazu folgen aus den Gleichungen

$$M_1 = r\Sigma p_i \cos\frac{2\pi(i-1)}{n} = \xi\Sigma p_i \quad \text{(Bezugsachse waagerecht)},$$

$$M_2 = r\Sigma p_i \sin\frac{2\pi(i-1)}{n} = \eta\Sigma p_i \quad \text{(Bezugsachse senkrecht)}.$$

Demnach ist

$$e = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} = \frac{1}{\Sigma P_i}\sqrt{\left[\Sigma p_i \cos\frac{2\pi}{n}(i-1)\right]^2 + \left[\Sigma p_i \sin\frac{2\pi}{n}(i-1)\right]^2}$$

und das Maximalmoment also

$$M_{max} = \sqrt{\left[\Sigma p_i \cos\frac{2\pi}{n}(i-1)\right]^2 + \left[\Sigma p_i \sin\frac{2\pi}{n}(i-1)\right]^2}.$$

Schließlich gilt wegen $\operatorname{tg}\beta = \eta/\xi$ für den Winkel

$$\beta = \operatorname{arc\,tg}\frac{\Sigma p_i \sin\frac{2\pi}{n}(i-1)}{\Sigma p_i \cos\frac{2\pi}{n}(i-1)}$$

Diese Ergebnisse sind offensichtlich den vorhin abgeleiteten Beziehungen völlig analog. Damit ist gezeigt, daß sich für das „Tensor-Rad" folgende Sätze aufstellen lassen. (Das Beispiel des Verzerrungszustandes soll beibehalten werden; selbstverständlich könnte dafür auch der ebene Spannungszustand oder jeder andere ebene Tensorzustand gesetzt werden.)

1. Die von den Gewichten hervorgerufene Kraft $P=\Sigma p$ ist proportional der mittleren Dehnung.

2. Das von den Gewichten verursachte Drehmoment $M=\Sigma p\, e \sin\beta$ ist proportional der Schiebung in den Richtungen, die von der durch die Achse gehenden Vertikalen gegeben sind. Das Maximalmoment $M_{max}=e\Sigma p$ ist also proportional der Hauptschiebung.

3. Die Scheibe schwingt unter dem Einfluß des Drehmomentes mit der Anfangsamplitude β um eine stabile Ruhelage, die Hauptdehnungsrichtung, die im Winkel β zur Bezugslinie (Meßrichtung 1) liegt. Ein indifferentes Gleichgewicht der Scheibe würde einen gleichmäßigen Spannungszustand bedeuten.

4. Die Meßwerte werden selbsttätig nach der Methode der kleinsten Quadrate ausgeglichen.

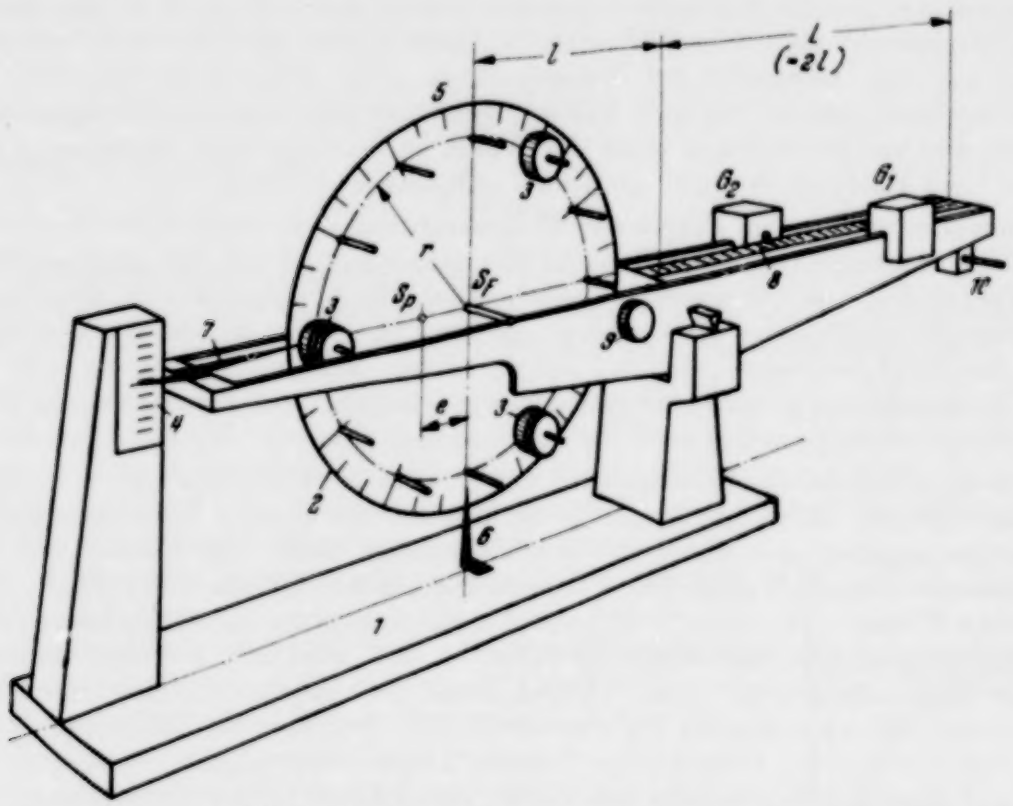

Abb. 5. Schematische Darstellung einer Tensorwaage
(benutzt zur Auswertung eines Satzes von drei Dehnungsmessungen gleichen Winkelabstandes in einem Schalenpunkte).

1 Grundplatte und Waagenfuß.
2 Tensorrad mit Zapfen für Dehnungsgewichte.
3 Aufgesteckte Dehnungsgewichte.
4 Waagenskala.
5 Skala für Hauptspannungsrichtung.
6 Zeiger für Hauptspannungsrichtung.
7 Hilfszeiger für Drehung des Tensorrades.
8 Spannungsskala.
9 Arretiervorrichtung.
10 Zapfen für Ausgleich negativer Dehnungen.
G_1 Erstes Laufgewicht.
G_2 Zweites Laufgewicht.
Sf Scheibenschwerpunkt.
Sp Schwerpunkt der Dehnungsgewichte.

b) Beschreibung (Abb. 5). Die Erkenntnisse des vorigen Abschnittes lassen sich zur Konstruktion eines einfachen Auswertegerätes für Dehnungsmessungen (bzw. Messungen anderer Tensor-Komponenten) verwenden. Dieses Tensorwaage genannte Gerät liefert aus mindestens drei äquidistanten Meßwerten ohne jede Rechnung oder Zeichnung sofort das wahrscheinlichste Auswertungsergebnis.

Das Gerät besteht aus einer Kreisscheibe, die mit ihrer waagerecht liegenden Rotationsachse am Ende des kürzeren Armes einer Hebelwaage so gelagert ist, daß sie den längeren Arm im Gleichgewicht hält. Ihr Umfang trägt in konstanten Abständen eine Anzahl (etwa 12) waagerechte Zapfen zum Aufstecken kleiner Gewichtsstücke. Wird die normale Lage des Waagebalkens durch die aufgesteckten Gewichte gestört, so läßt sich das Gleichgewicht durch Verschieben eines Laufgewichtes auf der anderen Seite wieder herstellen, worauf dort auf einer Teilung des Hebels die Größe der mittleren Dehnung abgelesen werden kann. Auf einer Doppelgradteilung des Randes der Scheibe, die sich nun infolge ungleich verteilter Gewichte im stabilen Gleichgewicht befindet, zeigt eine feste Marke die Hauptdehnungsrichtung an. Dreht man schließlich die Scheibe um 90° aus ihrer Ruhelage und arretiert sie dort am Hebel.

so ist das Gleichgewicht der Waage abermals gestört, da das Anwachsen des kurzen Hebelarmes um den Schwerpunktabstand e ein zusätzliches Moment hervorruft. Nachdem dieses durch Verschieben eines zweiten Laufgewichtes auf dem langen Arm wieder ausgeglichen ist, ergibt sich auf der alten Teilung die Hauptschiebung. Mit den drei abgelesenen Werten ist der Verzerrungszustand vollkommen bestimmt, denn die Hauptdehnungen sind gleich der Summe und Differenz aus der mittleren Dehnung und der Hauptschiebung. Es muß aber nochmals hervorgehoben werden, daß auf jeden Fall konstante Richtungsintervalle der Meßstellen vorhanden sein müssen, daß also auch keine Meßwerte ausfallen dürfen.

Solange alle Meßwerte einheitliche Vorzeichen haben, besteht keine weitere Schwierigkeit. Oft sind die Dehnungen aber zum Teil positiv, zum Teil negativ. Dann behandelt man die „gewichtigere" der beiden Gruppen wie sonst, der Rest wird wegen seines entgegengesetzten Vorzeichens auf die jeweils gegenüberliegenden Zapfen gesteckt, weil damit das Moment um den Scheibendrehpunkt die Richtung wechselt. Dann stimmt jedoch das Scheibengewicht bzw. das Moment um den Drehpunkt des Waagebalkens nicht mehr, denn Gewichte umgekehrten Vorzeichens müßten sich als Auftrieb äußern. Das läßt sich dadurch korrigieren, daß die genannten Gewichte auf der anderen Seite der Waage in der doppelten Entfernung des Scheibendrehpunktes vom Balkendrehpunkt nochmals aufgesteckt werden.

Schließlich sind noch einige Fragen der Dimensionierung, besonders der Gewichte, zu klären. Es werde die Forderung vorangestellt, daß der Gewichtssatz für die gemessenen Dehnungen bei allen Werkstoffen und Spannungszuständen der gleiche bleiben soll. Das Einheitsgewicht einer Dehnung $\Delta\varepsilon = 10^{-4}$ habe die Größe g Gramm. Vor allem handelt es sich um eine solche Bemessung der Laufgewichte G, daß bei aufgesteckten Dehnungsgewichten nicht erst mittlere Dehnung, Hauptschiebung und Hauptdehnungsrichtung, sondern sofort mittlere Normalspannung, Hauptschubspannung und Hauptspannungsrichtung abgelesen werden können.

Im verwandten Fall des durch Längskraft und Biegemoment beanspruchten Rohres oder Rundstabes ist das einfach, da hier in erster Näherung ein einachsiger Spannungszustand vorliegt. Die Spannungen ergeben sich dabei aus den Dehnungen nach dem Hookeschen Gesetz durch Multiplikation mit dem E-Modul. Der Proportionalitätsbereich eines Materials mit den Werkstoffkonstanten E und ν sei $-\sigma_P < \sigma < +\sigma_P$. Ist die Spannung σ_P als Endwert der Spannungsskala auf dem langen Arm der Waage gewählt, so teilt man die gesamte Skalenlänge L von hier bis zum Balkendrehpunkt in σ_P gleiche Teile. Die größten zu erwartenden Dehnungen sind dann $\varepsilon_P = \sigma_P/E$, also können im extremen Fall der reinen Längsspannung höchstens $n\,(\sigma_P/E)\,g \cdot 10^4$ Gramm an Dehnungsgewichten aufgesteckt werden, wobei n die Zahl der Meßstellen auf dem Rohrquerschnitt ist. Greift diese Kraft in der Entfernung l vom Balkendrehpunkt an (nämlich im Scheibendrehpunkt), so muß das Laufgewicht G_1, das die Längsspannung anzeigen soll, bei voller Ausnutzung der Skalenlänge L folgender Gleichung genügen:

$$n \frac{\sigma_P}{E} g \cdot 10^4 l = G_1 L.$$

Also ist

$$G_1 = \frac{l}{L} n \frac{\sigma_P}{E} g \cdot 10^4.$$

Das Maximalmoment der bei reinem Biegezustand mit Randfaserspannung σ_P ausgesteckten Dehnungsgewichte um die Scheibenachse wird gleich

$$M = r \frac{n}{2} \frac{\sigma_P}{E} g \cdot 10^4.$$

Bei unveränderter, voll ausgenutzter Spannungsskala gilt jetzt für das zweite Laufgewicht, das die Hauptbiegespannung anzeigen soll, die Bestimmungsgleichung

$$r \frac{n}{2} \frac{\sigma_P}{E} g\, 10^4 = G_2 L.$$

Also ist

$$G_2 = \frac{r}{2L} n \frac{\sigma_P}{E} g\, 10^4.$$

Zum Ablesen der Biegerichtung muß der Scheibenumfang in diesem Fall eine einfache Gradteilung tragen.

Werden dagegen Dehnungsmessungen in einem Punkte einer Fläche ausgewertet, so muß man den Einfluß der Querverformungen beachten, der im Hookeschen Gesetz für den ebenen Spannungszustand zum Ausdruck kommt:

$$\varepsilon_\varphi = \frac{1}{E}\left(\sigma_\varphi - \nu\,\sigma_{\varphi+\frac{\pi}{2}}\right) \quad \text{oder} \quad \sigma_\varphi = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_\varphi + \nu\,\varepsilon_{\varphi+\frac{\pi}{2}}\right).$$

Aus der bekannten Gleichung für die Spannung σ_φ in Richtung φ, ausgedrückt durch die Hauptspannungen

$$\sigma_\varphi = \frac{1}{2}(\sigma_{\max} + \sigma_{\min}) + \frac{1}{2}(\sigma_{\max} - \sigma_{\min})\cos 2\varphi$$

wird durch Einsetzen des Hookeschen Gesetzes

$$\sigma_\varphi = \frac{E}{1-\nu}\,\frac{1}{2}(\varepsilon_{\max} + \varepsilon_{\min}) + \frac{E}{1+\nu}\,\frac{1}{2}(\varepsilon_{\max} - \varepsilon_{\min})\cos 2\varphi$$
$$= \frac{E}{1-\nu}\,\bar{\varepsilon} + \frac{E}{1+\nu}\,\frac{\gamma_{\max}}{2}\cos 2\varphi.$$

Aus der Dehnung in Richtung φ

$$\varepsilon_\varphi = \bar{\varepsilon} + \frac{\gamma_{\max}}{2}\cos 2\varphi$$

erhält man also die gesuchte Spannung, wenn man das erste Glied mit $E/(1-\nu)$, das zweite mit $E/(1+\nu)$ multipliziert. Gelten wieder die alten Bezeichnungen und Proportionalitätsgrenzen, so findet man als neue Laufgewichte für den zweiachsigen Spannungszustand

$$G_1 = \frac{l}{L}\,n\,\frac{1-\nu}{E}\,\sigma_P g \cdot 10^4 \quad \text{und} \quad G_2 = \frac{r}{2L}\,n\,\frac{1+\nu}{E}\,\sigma_P g \cdot 10^4.$$

Die Ableseskala kann beibehalten werden. Sie ändert sich nur mit σ_P, also mit dem untersuchten Werkstoff. Durch entsprechende nicht-lineare Teilung dieser Skala läßt sich übrigens, hauptsächlich bei einachsigem Spannungszustand, eine Unregelmäßigkeit im Spannungs-Dehnungs-Diagramm leicht berücksichtigen, wie Abb. 6 zeigt.

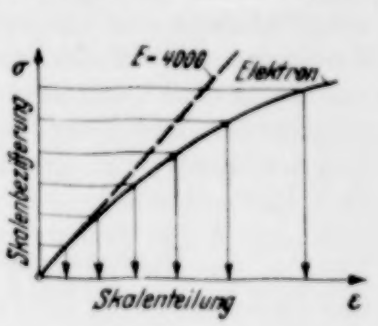

Abb. 6.

Solange die Querzahlen ν verschiedener Stoffe ungefähr übereinstimmen, wird man die Größe der Laufgewichte durch Abstimmen von σ und E so einrichten, daß sie für den einachsigen bzw. zweiachsigen Spannungszustand unabhängig vom Werkstoff beibehalten werden können. Dazu muß etwa $(\sigma_P/E)_1 \approx (\sigma_P/E)_2$ sein usw. Außerdem gehen die Laufgewichte linear mit der Meßstellenzahl; man ergänzt sie also nötigenfalls durch Zusatzgewichte.

c) Beispiel. Als Beispiel betrachten wir eine Dehnungswaage mit den Abmessungen $l = l$ cm, $L = 2l$ cm, $r = 2l/3$ cm, der Gewichtseinheit $g = 1$ g und der Meßstellenzahl $n = 6$. Als Werkstoffe sollen Dural mit $E = 7000$ kg/mm², $\nu = 0{,}3$, $\sigma_P = 20$ kg/mm² und Stahl mit $E = 21000$ kg/mm², $\nu = 0{,}3$, $\sigma_P = 60$ kg/mm in Betracht kommen. Es müssen zwei lineare Skalen von der Länge $L = 2l$ cm hergestellt werden, mit der Teilung von 0 bis 20 kg/mm² für Dural und von 0 bis 60 kg/mm² für Stahl (eventuell können beide auch vereinigt werden). Bei der Untersuchung des einachsigen Spannungszustandes im Schnitt eines durch Längskraft und Biegemoment beanspruchten Rundstabes kommen dann die Laufgewichte

$$G_1 = \frac{l}{2l} \cdot 6\,\frac{20}{7000} \cdot 1 \cdot 10^4 = 85{,}714\,\text{g},$$

$$G_2 = \frac{2l}{3 \cdot 4l} \cdot 6\,\frac{20}{7000} \cdot 1 \cdot 10^4 = 28{,}571\,\text{g}$$

in Anwendung. Beim zweiachsigen Spannungszustand in einem Flächenpunkt werden die Laufgewichte gleich

$$G_1 = \frac{l}{2l} \cdot 6\,\frac{1-0{,}3}{7000} \cdot 20 \cdot 10^4 = 60{,}000\,\text{g}.$$

$$G_2 = \frac{2l}{3 \cdot 4l} \cdot 6\,\frac{1+0{,}3}{7000} \cdot 20 \cdot 10^4 = 37{,}143\,\text{g}.$$

(Eingegangen am 6. März 1944.)

Die Lösung des Sechsstabanschlusses mit der Methode der dualen Abbildung.

Von H. Dietz in Darmstadt.

1. Einleitung. Ein Körper unter allgemeiner räumlicher Belastung ist statisch bestimmt gelagert mit sechs Lagerfesseln in allgemeiner Lage. Zur Lösung der sechs Lagergrößen, die sich aus Kräften und Momenten zusammensetzen können, dienen die Gleichgewichtsbedingungen des Raums:

$$\sum X_i = 0, \qquad \sum Y_i = 0, \qquad \sum Z_i = 0.$$
$$\sum M_{ix} = 0, \qquad \sum M_{iy} = 0, \qquad \sum M_{iz} = 0.$$

Von diesen können die Komponentenbedingungen durch drei weitere Momentenbedingungen ersetzt werden, so daß als Lösungsgrundlage auch die sechs Momentengleichungen benutzt werden können:

$$\sum \text{Momente um 6 Achsen in allgemeiner Lage} = 0.$$

Die sechs Momentenachsen haben, damit sie sechs unabhängige Gleichungen ergeben, nur die Bedingung zu erfüllen, daß sie in „allgemeiner Lage" liegen müssen. Das heißt im wesentlichen, sie sind so zu wählen, daß es keine Gerade gibt, die alle sechs Achsen schneidet.

Mit dem Ansatz dieser Gleichgewichtsbedingungen sind die Lösungsmöglichkeiten des Sechsstabanschlusses im wesentlichen erschöpft. Ein direktes allgemein gültiges Verfahren zur zeichnerischen Ermittlung ist bisher nicht bekannt geworden. Wohl existieren — neben der Kontrollmöglichkeit des Gleichgewichts in drei Projektionen — graphische Verfahren für die allgemeine Zerlegung einer Kraft in sechs Komponenten vorgeschriebener Richtungen von *W. Stäckel*[1] und *R. Skutsch*[2], die aber für die praktische Durchführung recht umständlich werden, und ein graphisches Verfahren für bestimmte Voraussetzungen der Lagerung, das von *R. Kraus*[3] angegeben wurde: Ein durch eine Kraft belasteter Körper, dessen Anschluß„stäbe" so angeordnet sind, daß sich mindestens zwei davon schneiden, also eine Ebene bilden, läßt sich so behandeln, daß man durch geschickte Zerlegung und Zusammenfassung der Komponenten mit anderen Kräften eine Reihe ebener Probleme hintereinander schaltet, über die man rückwärts schreitend mit Hilfe einzelner Kraftdreiecke in den zugehörigen Ebenen die Stabkräfte finden kann. Das Verfahren erfordert erhebliche Zeichenarbeit und versagt bei der allgemeinen Lagerung mit sechs windschiefen Kräften.

Es soll hier nun ein Weg gezeigt werden, der über die duale Abbildung der Kräfte und Momente eines allgemein gelagerten Körpers mit allgemeinster Belastung die Bestimmung der Stabkräfte unter weitgehendster Benutzung der graphischen Statik erlaubt. Die Lösung selbst ist in der dualen Abbildung auf parallele oder in einer Ebene zerstreut liegende Vektorzusammensetzungen bzw. -gleichgewichtsprobleme zurückgeführt, stellt also eine bequem durchzuführende Aufgabe dar.

2. Die duale Abbildung von Kraft und Moment. Die duale Abbildung einer Kraft[4] beruht auf einer Einordnung einer räumlich orientierten Kraft in eine beliebig festzusetzende Ebene. Die Projektion der Kraft auf die Abbildungsebene wird in der Abbildung in wahrer Größe dargestellt. Die lotrechte Komponente wird durch die Lage der Projektion in bezug auf einen beliebig festzusetzenden Bezugspunkt O in der Abbildungsebene eindeutig festgelegt (vgl. Abb. 1). Da nun bei allgemein räumlich angeordneten Kräften auch die Lage der Kraft beschrieben werden muß, legt man im Raumsystem einen Punkt fest, auf den die Lage der Kraft bezogen wird, und stellt für diesen Punkt bzw. die drei Koordinatenachsen durch diesen Punkt die Momente auf. Das Moment der Kraft um den Punkt des Raumsystems wird, ebenso wie ein anderes (gegebenes) Moment, so dargestellt, daß die Momentenvektorkomponente senkrecht

[1] *W. Stäckel*, Z. Math. Physik 43 (1898) S. 62.
[2] *R. Skutsch*, Sitzungsber. Berl. Math. Gesellsch. 1 (1902) S. 59.
[3] *R. Kraus*, Bautechn. 20 (1942) S. 256.
[4] *R. Sauer*. Z. angew. Math. Mech. 20 (1940) S. 174.

zur Abbildungsebene erhalten bleibt, während der parallel bzw. in der Abbildungsebene liegende Momentenvektor die Lage des Fußpunktes des Abbildungsvektors bestimmt. Man benutzt also die Plückerschen Koordinaten X_i, Y_i, Z_i, M_{xi}, M_{yi}, M_{zi} der räumlichen Kraft und stellt jeweils Kräfte und Momente nach eindeutig umkehrbaren Gesetzen in einer bzw. auf einer Ebene dar.

Auf diese Weise erscheinen alle „Stäbe" (jede Lagerfessel läßt sich als „Stab"fessel deuten) in ihrer Größe und Richtung als zerstreute Kräfte in der Ebene, alle „Momente" (Lagenmomente der Lagerfesseln in bezug auf den Punkt des Raumsystems und direkt gegebene Momente) als parallele Vektoren senkrecht zur Abbildungsebene. Die Abbildung ist dem wirklichen System eindeutig umkehrbar zugeordnet, d. h. aus jeder Abbildungsgröße ist wieder der entsprechende reale Wert eindeutig zu bestimmen und umgekehrt.

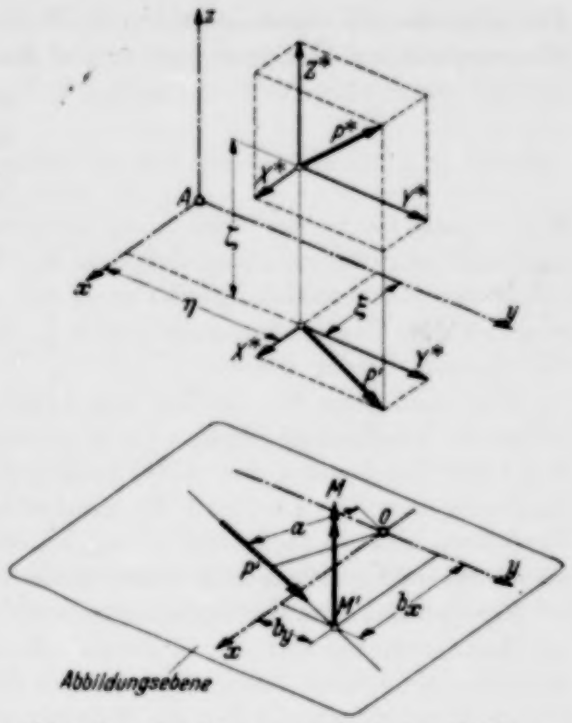

Abb. 1. Zum Zuordnungsgesetz der dualen Abbildung.

Bezeichnen wir mit X^*, Y^*, Z^* die Komponenten der räumlich angeordneten Kraft und mit M_x^*, M_y^*, M_z^* die Momente der Kraft um die x-, y-, z-Achsen durch den festgelegten Raumpunkt A, dann bildet sich die Kraft in eine Abbildungsebene parallel zur (x, y)-Ebene folgendermaßen ab:

$$X = X^*, \quad Y = Y^*, \quad P'a = cZ^*.$$

X und Y zusammengesetzt liefern die Abbildungskraft P' (parallel und gleich groß $P^{*\prime}$); a ist der Abstand der Abbildungskraft P' vom Bezugspunkt 0; c ist eine Abbildungskonstante, die je nach dem Platzverhältnis der Zeichnung willkürlich zu wählen ist, für die ganze Aufgabe dann aber beibehalten werden muß.

Die Lagenmomente der Kräfte (der gegebenen sowie der Stabkräfte) und die äußeren Momente bilden sich als Vektoren M senkrecht zur Abbildungsebene ab. Es wird

$$M\,b_y = c\,M_x^*, \quad M\,b_x = -c\,M_y^*, \quad M = M_z^*;$$

darin sind b_x, b_y die Koordinaten des Fußpunktes M' des Abbildungsvektors M.

Um zu einer Abbildung zu gelangen, sind also (nach Wahl der Abbildungsebene und der Konstanten c) außer der Projektion P' des Stabbildes auf die Abbildungsebene noch die Werte a, b_x und b_y zu bestimmen. Diese Größen können mit den oben gegebenen Zuordnungsgleichungen oder auch graphisch ermittelt werden. Die zeichnerische Ermittlung erfordert eine exakte Zeichnung des Stabsystems und die Darstellung der Momentenvektoren in den drei Projektionen der darstellenden Geometrie. Für eine analytische Lösung genügen die Angaben der Stabprojektionen und deren Lage zum Festpunkt des Raums (z. B. die Koordinaten eines Stabpunktes).

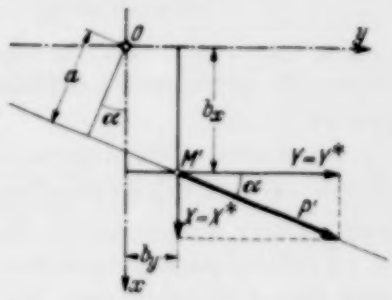

Abb. 2. Zur Lage des Fußpunkts M' zur Kraftbildlinie.

Der Fußpunkt M' des Lagenmomentes liegt stets auf der Abbildungsgeraden der Kraft. Zum Beweis dieser Behauptung errechnen wir den Abstand des Fußpunktes (b_x, b_y) von der Kraftbildlinie. Unter Beachtung der Benennungen der Abb. 2 ist der Abstand d nach der Hesseschen Normalform

$$d = b_x \cos\alpha + b_y \sin\alpha - a$$

mit

$$\cos\alpha = \frac{Y^*}{P'}, \qquad \sin\alpha = -\frac{X^*}{P'} \qquad (\alpha \text{ ist negativ});$$

weiterhin ist

$$b_x = -c\frac{M_y^*}{M}, \qquad b_y = +c\frac{M_x^*}{M}, \qquad P'a = cZ^*, \quad M_z^* = M.$$

Setzen wir diese Ausdrücke für die Größen der Abbildung in die Abstandsformel ein, so wird

$$d = -\frac{c}{MP'}\,(M_y^*\,Y^* + M_x^*\,X^* - M_z^*\,Z^*).$$

Die allgemeinen Ausdrücke für die Momente der Kraft um die einzelnen Achsen des räumlichen Bezugspunktes (Lagenmomente der Kraft) lauten mit den Bezeichnungen von Abb. 1

$$M_x^* = \eta Z^* - \zeta Y^*,$$
$$M_y^* = \zeta X^* - \xi Z^*,$$
$$M_z^* = \xi Y^* - \eta X^*.$$

Wir setzen sie in die Gleichung für den Abstand des Fußpunktes von der Wirkungslinie der Bildkraft ein und erhalten damit in der Tat $d = 0$. Mit dieser Erkenntnis, daß in der Abbildungsebene der Momentenfußpunkt stets auf der Wirkungslinie der zugehörigen Kraft liegt, erscheint eine der drei Bestimmungsgrößen a, b_x, b_y überzählig und kann als Kontrolle bei der Aufstellung der dualen Bilder dienen.

Nun sind aber die Größen der Lagerkräfte (Stabkräfte) zunächst noch unbekannt, es liegen lediglich die Wirkungslinien im Raumsystem fest. Danach lassen sich hierfür die Kraftgrößen nicht zur Festlegung der Abbildungsgrößen benutzen. Jeder Wirkungslinie im Raum muß aber eindeutig eine Kraft- und Momentenwirkungslinie in der Abbildung entsprechen, wenn das Verfahren der dualen Abbildung eindeutige umkehrbare Bilder liefern soll. Die Festlegung dieser Wirkungslinien muß daher auch durchzuführen sein, ohne daß die Kraftgröße bekannt ist.

Bezeichnen wir die Stablänge (oder eine beliebige Strecke auf der Wirkungslinie der Kraft im Raumsystem) mit l und deren „Komponenten", d. h. die Projektionen der Länge auf die Koordinatenachsen, mit x, y, z, dann ist für die Projektion $S^{*\prime}$ der Stabkraft S^* auf die x, y-Ebene bzw. allgemein für die Komponenten der Raumkraft

$$S' = S^{*\prime} = \frac{S^*}{l} l' = \frac{S^*}{l} \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$X^* = \frac{S^*}{l} x, \qquad Y^* = \frac{S^*}{l} y, \qquad Z^* = \frac{S^*}{l} z.$$

Mit der Abbildungsdefinition $a = c \dfrac{Z^*}{S'}$ wird also

$$a = c \frac{z}{l'} = c \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

In gleicher Weise entstehen allgemeine Ausdrücke für die Fußpunktskoordinaten b_x, b_y des Abbildungsmomentes:

$$b_x = -c \frac{M_y^*}{M_z^*} = -c \frac{\zeta X^* - \xi Z^*}{\xi Y^* - \eta X^*} = +c \frac{\xi z - \zeta x}{\xi y - \eta x},$$

$$b_y = +c \frac{M_x^*}{M_z^*} = +c \frac{\eta Z^* - \xi Y^*}{\xi Y^* - \eta X^*} = +c \frac{\eta z - \zeta y}{\xi y - \eta x},$$

worin ξ, η, ζ die Koordinaten eines beliebigen Punktes auf der Kraftwirkungslinie im Raumsystem sind.

Statt der Koordinaten in einem festgelegten Achsenkreuz lassen sich auch die drei Projektionen der darstellenden Geometrie benutzen. Bezeichnet man die Projektion der Stablänge (oder einer Strecke auf der Kraftlinie) auf die Abbildungsebene als Grundriß [(x, y)-Ebene] mit l', die Aufrißprojektion [(x, z)-Ebene] mit l'', die Seitenrißprojektion [(y, z)-Ebene] mit l''' und die Abstände der Stabkraftlinien vom Bezugspunkt in diesen Projektionen mit h', h'' und h''', so wird mit diesen Größen, die aus einer genauen Auftragung zu entnehmen sind,

$$a = c \frac{z}{l'}, \qquad b_x = -c \frac{M_y^*}{M_z^*} = -c \frac{l'' h''}{l' h'},$$

$$b_y = +c \frac{M_x^*}{M_z^*} = +c \frac{l''' h'''}{l' h'}.$$

Schließlich können die drei Bestimmungsgrößen der dualen Abbildung auch noch auf rein graphischem Wege gewonnen werden, wenn wir z. B. auf der Grundrißprojektion der Kraftlinie (Stabprojektion) die Abbildungskonstante c antragen, diese Strecke in den Aufriß projizieren und dort die lotrechte Komponente (Projektion auf die z-Richtung) als Wert a abgreifen. Ähnlich sind b_x und b_y als Strecken auf den Bildern der Momentenvektoren zu finden[1]. Von dieser

[1] Vgl. *W. Schlink*. Technische Statik, 2. u. 3. Aufl. Berlin 1946.

Möglichkeit wird jedoch in der vorliegenden Arbeit kein Gebrauch gemacht. Es sei lediglich deshalb erwähnt, weil damit das ganze Bestimmungsverfahren der Lagerkräfte oft auf rein zeichnerischem Wege durchgeführt werden kann, ohne daß irgendein Wert errechnet werden müßte.

Der Zusammenhang zwischen der Größe des Lagenmomentes und der Größe der Abbildungskraft im dualen Bild ist durch folgende Beziehung gegeben. Es ist

$$\frac{X^*}{Y^*} = \frac{x}{y}, \quad \text{also} \quad X^* = Y^* \frac{x}{y}, \quad Y^* = X^* \frac{y}{x}.$$

Weiterhin ist

$$M_z^* = M = \xi Y^* - \eta X^* = \xi X^* \frac{y}{x} - \eta X^*.$$

Daraus folgt $X^* = M \frac{x}{\xi y - \eta x}$ und entsprechend $Y^* = M \frac{y}{\xi y - \eta x}$ oder allgemeiner

$$\frac{X^*}{x} = \frac{Y^*}{y} = \frac{S'}{l'} = \frac{M}{\xi y - \eta x}.$$

An Stelle des Nenners $(\xi y - \eta x)$ läßt sich, wie oben bereits gezeigt, bei direkter Entnahme der Werte aus der Zeichnung auch schreiben $(l' h')$, so daß die Beziehung auch geschrieben werden kann

$$S' = \frac{M}{h'}.$$

Das bedeutet: Ist der Momentenvektor M gefunden (aus einer Gleichgewichtsbeziehung der Momentenvektoren untereinander), so ist damit zugleich die Abbildungskraft S' gegeben und umgekehrt.

3. Die Gleichgewichtsbedingungen in der dualen Abbildung. Wie übertragen sich nun die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen des Raums in die duale Abbildung? Wir untersuchen der Reihe nach, wie die gegebenen Gleichgewichtsbedingungen des Raumsystems, mit den Abbildungsgesetzen geschrieben, in der Ebene der dualen Abbildung wiederum als Gleichgewichtsbedingungen auftauchen, und finden als Ergebnis folgende Tabelle 1.

Tabelle 1. *Die Gleichgewichtsbedingungen im Raum und in der Abbildung.*

Die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen des Raums	Entsprechende Bedingungen für die duale Abbildung	Lösungsmöglichkeiten in der dualen Abbildung
$\Sigma X_i^* = 0, \quad \Sigma Y_i^* = 0;$	$\Sigma X_i = 0, \quad \Sigma Y_i = 0$ bzw. $\Sigma P_i' = 0;$	Das Krafteck der Abbildungskräfte ist geschlossen.
$\Sigma Z_i^* = 0.$	$\frac{1}{c} \Sigma P_i' a_i = 0.$	Momentengleichgewicht: das Seileck der Bildkräfte ist geschlossen.
$\Sigma M_x^* = 0,$	$\frac{1}{c} \Sigma M b_y = 0,$	Gleichgewicht der Abbildungsmomentenvektoren. (Die Momente um zwei Achsen und die Summe der Momentenvektoren verschwinden; oder die Summe der Momente um drei Achsen ist null.)
$\Sigma M_y^* = 0,$	$\frac{1}{c} \Sigma M b_x = 0,$	
$\Sigma M_z^* = 0.$	$\Sigma M = 0.$	

Aus diesen Zusammenhängen der Gleichgewichtsbedingungen des Ausgangssystems mit entsprechenden (eindeutig zugeordneten) Gleichgewichtsaussagen der Abbildung erkennen wir, daß für ein Lösungsverfahren in der dualen Abbildung die Bildkräfte und die Bildmomente je für sich untereinander im Gleichgewicht stehen. Beide Gruppen sind getrennt voneinander zu behandeln. Das sind sechs selbständige Aussagen, denn Stabkraft und Lagenmoment, d. h. Bildkraft- und Bildmomentenvektor gehören zwangsläufig zusammen, mit der Kenntnis einer Größe ist auch die andere bestimmt.

An Stelle der sechs Gleichgewichtsbedingungen des Raums entstehen somit zwei Gruppen von je drei selbständigen Gleichgewichtsbedingungen, die beide graphisch als ebene Probleme gelöst werden können, sobald in jeder Gruppe nur drei Unbekannte auftreten:

1. Die Kräfte in der Abbildung stellen zerstreut in einer Ebene liegende Kraftvektoren dar. für die im Gleichgewichtsfall Krafteck und Seileck geschlossen sein muß (damit sind drei Unbekannte zu finden).

2. Die Momentenvektoren sind parallele liniengebundene Vektoren senkrecht zur Abbildungsebene, deren Gleichgewichtsforderung in zwei Seitenrissen graphisch zu bestimmen ist, die aber auch mit einfachen Momentengleichungen (um jede beliebige Achse der Bildebene) ins Gleichgewicht gesetzt werden können (damit sind wieder drei Unbekannte zu finden).

Nach diesen Erkenntnissen ist es also für die Lösung eines Sechsstab-Anschlusses nötig, diese Trennung der Bestimmungsgleichungen auch auf die Unbekannten zu übertragen, d. h. wir müssen versuchen, nur drei Bildstäbe oder nur drei Momentenvektoren in der dualen Abbildung auftreten zu lassen. Als Mittel zur Erreichung dieser Forderung steht uns die Wahl der Abbildungsebene und die Wahl des Bezugspunktes im Raumsystem zur Verfügung. Wir fragen also zunächst: Wie kann man einen Bildkraftvektor oder einen Bildmomentenvektor zu null werden lassen?

Jeder Kraft, also auch jedem Stab, ist in der dualen Abbildung ein Bildkraft- und ein Bildmomentenvektor zugeordnet. Die Abbildung der Kraftgröße ist in weitem Maße von der Wahl der Abbildungsebene abhängig, während die Lage des Bezugspunktes A im Raumsystem keinen Einfluß auf die Abbildungskraft hat. Wählen wir die Abbildungsebene [(x, y)-Ebene] parallel zur Kraft im Raum, dann hat die Kraft keine Z^*-Komponente; das bedeutet, daß die Größe a im Abbildungssystem null wird, der Bildvektor also durch den Bezugspunkt O geht. Die Lage der Abbildungsebene senkrecht zum Stab liefert keine Abbildungskraft ($X^*=0$, $Y^*=0$), aber der Wert a ($= cZ^*/S'$) wird unendlich groß, und wir erhalten das Bild eines unendlich fernen Punktes. Im Sinne der Statik stellt dieser unbestimmte Ausdruck $0 \cdot \infty$ für die Z^*-Komponente eine Momentenwirkung von der Größe cZ^* dar, die natürlich in den Gleichgewichtsbetrachtungen der Bildkräfte entsprechend zu berücksichtigen ist. Jede andere Wahl der Abbildungsebene wird zwischen den beiden besprochenen Grenzfällen liegen, und wir sehen, daß die Wirkungslinie der Bildkraft stets vorhanden ist und die Kraft selbst nur durch die Belastung bedingt null werden kann. Diese allgemeine Betrachtung, daß durch die Wahl der Abbildungsebene keine Reduzierung der sechs Unbekannten der Bildstabkräfte erreicht werden kann, zeigt damit zugleich, daß die Lage der Abbildungsebene beliebig sein kann, daß wir z. B. stets den Grundriß als Abbildungsebene verwenden können.

Der Momentenvektor, der die Lage der Kraft zum Bezugspunkt A des Raumsystems kennzeichnet, kann in besonderen Fällen verschwinden. So wird z. B. das Lagenmoment einer Stabkraft für einen Punkt auf der Stablinie selbst null. Wählen wir also den Bezugspunkt auf einer Stabachse des Raumsystems, dann hat diese Stabkraft kein Moment um den Punkt, die drei Komponenten des Momentes sind null, d. h. es gibt für diesen Stab keinen Momentenvektor in der dualen Abbildung. Man muß sich aber vor dem Trugschluß hüten, daß die Lage der Projektion A' des Bezugspunktes im Grundriß auf dem Grundriß l' einer Stablinie schon genügt für das Verschwinden des Momentenvektors. In diesem Falle ist zwar $M_z^* = M = 0$, aber die Koordinaten des Fußpunktes $b_x = -cM_y^*/M$ und $b_y = +cM_x^*/M$ werden beide unendlich groß, und wir erhalten damit wieder einen unendlich fernen Vektor von der Größe null, d. h. eine Momentenwirkung, die in den Gleichungen dann auch als solche auftaucht. Die Momentenvektoren in der dualen Abbildung sind liniengebundene Vektoren, die also nicht, wie die vektorielien Symbole der Momente in der Statik, parallel zu sich selbst verschieblich sind; sie sind demnach zu behandeln wie parallele Kräfte der Raumstatik.

Gelingt es nun, durch Wahl eines geeigneten Bezugspunktes, für drei unbekannte Kräfte je den zugehörigen Momentenbildvektor verschwinden zu lassen, so existieren in der dualen Abbildung nur noch drei unbekannte Momentenvektoren, für die die bestehenden Gleichgewichtsbedingungen der Momentengruppe ausreichen. Nach der Auflösung dieser drei Lagenmomente sind die dazugehörigen Stabkräfte bzw. Bildkräfte mit den oben angegebenen Zusammenhangsgleichungen zu bestimmen. Es bleibt dann als Restaufgabe noch die Lösung der drei letzten Stabkräfte übrig, ein Problem, das im dualen Bild der Kräfte mit Kraft- und Seileck durchzuführen ist.

4. Lösung für den mit einem festen Punkt gelagerten Körper. Sind die Lagerfesseln eines allgemein belasteten Körpers so angeordnet, daß ein fester Punkt als Anschlußpunkt gewählt ist, bzw. drei Stäbe sich in einem Punkt schneiden (Abb. 3), dann sind damit die Stabkräfte ohne weiteres in einem dualen Bild zu finden, wenn der Bezugspunkt A des Raumsystems in diesen festen Punkt bzw. in den Schnittpunkt der drei Stäbe gelegt wird. Die Abbildungsebene wählt man zweckmäßig parallel zum Grundriß [(x, y)-Ebene].

Im Beispiel I (Abb. 3) gehen die drei Stäbe 1, 2, 3 durch einen Punkt, den wir als Bezugspunkt A wählen. Alle drei Stäbe haben damit kein Lagenmoment, erscheinen daher in der dualen Abbildung ohne Momentenvektor. Neben den gegebenen Momentenvektoren M_I, M_{II}, M_{P_1}, M_{P_2} treten im dualen Bild nur noch die unbekannten Momentenvektoren der Kräfte in den Stäben 4, 5 und 6 (M_4, M_5, M_6) auf, die mit den gegebenen Vektorbildern im Gleichgewicht stehen. Die Abbildungswerte für Bildkraft und Bildmoment (a, b_x, b_y) sind für die einzelnen Größen errechnet und in der Tabelle 2 aufgenommen. Die Größen b_x, b_y sind die Koordinaten des Durchstoßpunktes M_i, des Bildvektors und nach den Definitionsgleichungen von Seite 16 errechnet.

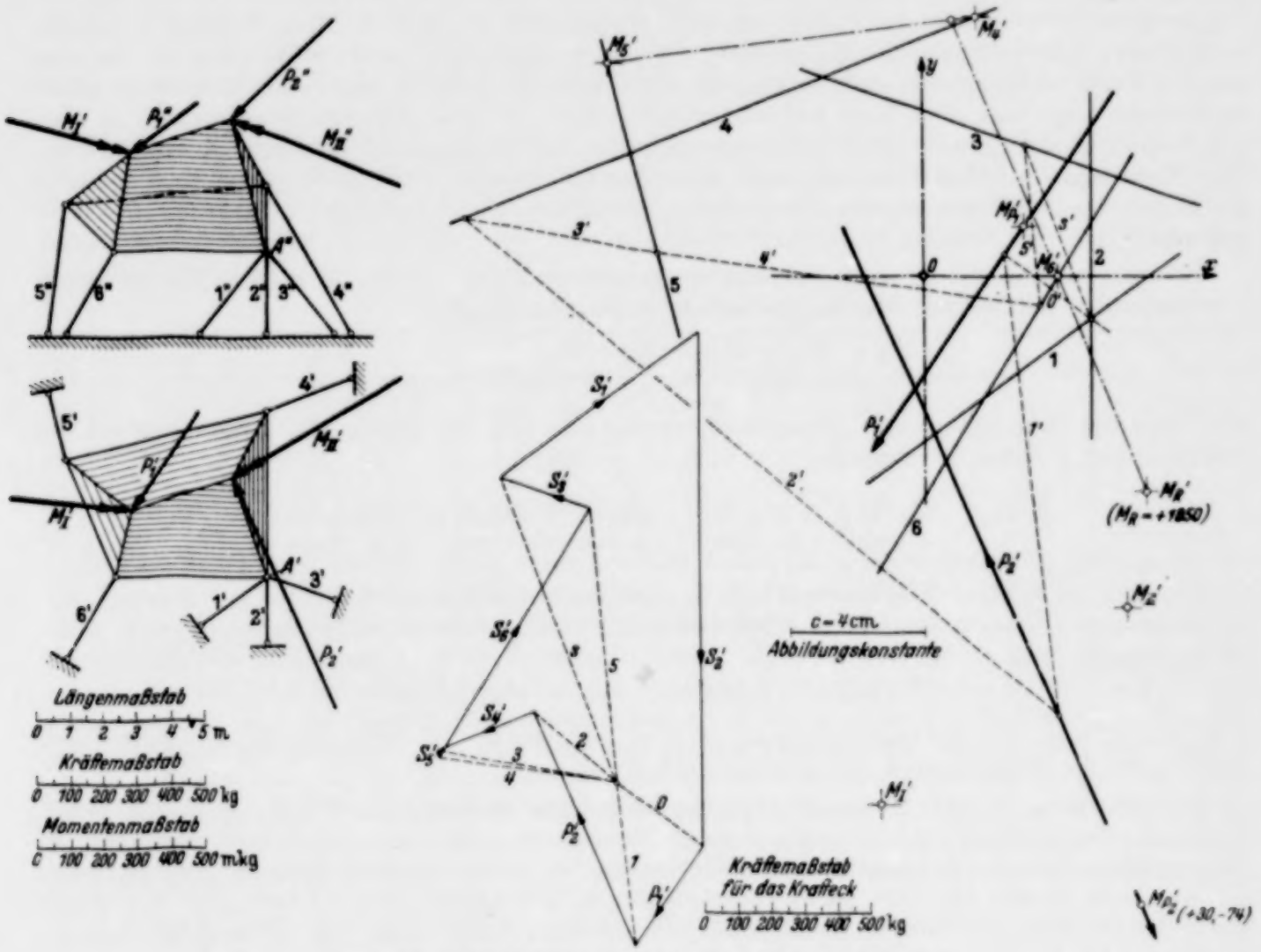

Abb. 3. Lösung des in einem festen Punkt gelagerten Körpers (Beispiel I).

Tabelle 2. *Die Abbildungswerte zum Beispiel I für $c = 4$ cm.*

Stab	Komponenten der Stablänge, Kraft usw.			Koordinaten eines Angriffspunktes			Kraftdarstellung		Momentendarstellung		
	x_i	y_i	z_i	ξ	η	ζ	l_i'	a_i	(M_x) Nenner $\xi y_i - \eta x_i$	b_x	b_y
1	−2	−1,5	−2,5	0	0	0	2,5	−4	0	—	—
2	0	−2	−2,5	0	0	0	2	−5	0	—	—
3	+2	−0,7	−2,5	0	0	0	2,119	−4,719	0	—	—
4	+2,5	+1	−4,5	0	+5	+2	2,693	−6,684	−12,5	+1,60	+7,84
5	−0,5	+2	−3,9	−6,0	+3,5	+1,4	2,062	−7,565	−10,25	−9,405	+6,420
6	−1,5	−2,5	−2,5	−4,5	0	0	2,915	−3,431	+11,25	+4,0	0
P_1	−200	−300	−150	−4	+2	+3	360,6	−1,664	+1600	+3,0	+1,5
P_2	−300	+700	−300	−1	+3	+4	761,6	−1,576	+200	+30	−74
M_I	+600	− 50	−150	—	—	—	—	-	(−150)	−1,333	−16,00
M_{II}	−500	−300	+200	—	—	—	—	—	(+200)	+6,00	−10,00

Mit diesen Abbildungswerten (die man auch zeichnerisch hätte finden können) stellen wir nun die duale Abbildung her. Als Abbildungsebene legen wir die Grundrißtafel zugrunde. Dann sind die Kraftwirkungslinien parallel zum Grundrißbild im Abstand a_i vom Bezugspunkt O entfernt einzutragen. Das Vorzeichen bzw. die Lage der Bildkraft zum Bezugspunkt O im dualen Bild wird so festgesetzt, daß das Moment der Abbildungskraft um O eine rechtsgängige Schraube in Richtung der Z^*-Komponente fortbewegt.

Die Wirkungslinien der Momentenvektoren stehen in den Fußpunkten M_i' senkrecht auf der Abbildungsebene. Die Fußpunkte mit den Koordinaten b_x, b_y liegen jeweils auf der zugehörigen Bildkraftwirkungslinie, und wir haben damit zugleich noch eine Kontrolle für die richtige Lage der Kraftwirkungslinien. Will man die Größen der Abbildungsvektoren für die Lagenmomente darstellen, so kann man die Strecken mit einem gewählten Maßstab in einem Aufriß oder Seitenriß zur Abbildungsebene auftragen, was jedoch meist nicht nötig ist, da man mit den Fußpunktsangaben und der Angabe der Größe $M_z^* = M$ bei gegebenen Momenten allein auskommt. Legt man aber Wert auf eine rein zeichnerische Durchführung der Aufgabe, so wird die Projektion der Momentenvektoren in zwei Tafeln senkrecht zur Abbildungsebene notwendig. Die Richtung von M richtet sich nach dem Fortschrittssinn einer rechtsgängigen Schraube, die durch das im Grundriß des Raumsystems sichtbare M_z^* der einzelnen Stäbe bzw. Kräfte gedreht wird.

In unserem Beispiel I lassen sich nun die gegebenen Momente M_I, M_{II}, M_{P_1}, M_{P_2} zu einem resultierenden Bildvektor M_R zusammenfassen von der Größe

$$\begin{aligned} M_R &= M_{P_1} + M_{P_2} + M_I + M_{II} \\ &= +1600 + 200 - 150 + 200 = +1850 \text{ mkg}. \end{aligned}$$

Die Lage des Bildvektors bzw. seines Fußpunktes läßt sich aus Momentenbeziehungen um die x-Achse und y-Achse bestimmen:

$$\begin{aligned} \sum M_x\colon\quad & M_{P_1} b_{y\,P_1} + M_{P_2} b_{y\,P_2} + M_I b_{y\,I} + M_{II} b_{y\,II} = M_R b_{y\,R}, \\ & + 1600 \cdot 1{,}5 - 200 \cdot 74 + 150 \cdot 16 - 200 \cdot 10 = 1850\, b_{y\,R}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum M_y\colon\quad & M_{P_1} b_{x\,P_1} + M_{P_2} b_{x\,P_2} + M_I b_{x\,I} + M_{II} b_{x\,II} = M_R b_{x\,R}, \\ & + 1600 \cdot 3 + 200 \cdot 30 + 150 \cdot 1{,}33 + 200 \cdot 6 = 1850\, b_{x\,R}. \end{aligned}$$

Daraus finden wir

$$b_{x\,R} = +6{,}595 \text{ cm}, \quad b_{y\,R} = -6{,}486 \text{ cm}.$$

(Graphisch wird die Zusammenfassung in zwei lotrechten Projektionstafeln mit Kraft- und Seileck für die Bildvektoren der Momente möglich.)

Wir erkennen an dieser Zusammenfassung aller äußeren Einflüsse, daß sich jede allgemeine Belastung in der dualen Abbildung auf einen Momentenvektor und einen Kraftvektor zurückführen läßt; denn die bekannten Bildkräfte lassen sich in der Abbildungsebene im allgemeinen als zerstreute Kräfte ebenfalls leicht zusammenfügen. Die allgemeinste Belastung ist also durch einen Bildkraftvektor und einen Bildmomentenvektor, beide dann natürlich ohne direkten Zusammenhang, gegeben.

Der resultierende Momentenvektor M_R, der damit alle gegebenen Momentenwerte enthält, wird nun mit den drei unbekannten Momentenvektoren M_4, M_5, M_6 ins Gleichgewicht gesetzt, wobei wir uns wieder der Momentengleichungen um zwei Achsen, z. B. der x- und y-Achse und der Gleichung für die Momentensumme bedienen können:

$$\begin{aligned} \sum M_x = 0\colon\quad & M_4 \cdot 7{,}840 + M_5 \cdot 6{,}420 + M_6 \cdot 0 - 1850 \cdot 6{,}486 = 0, \\ \sum M_y = 0\colon\quad & M_4 \cdot 1{,}600 - M_5 \cdot 9{,}405 + M_6 \cdot 4{,}00 + 1850 \cdot 6{,}595 = 0, \\ \sum M = 0\colon\quad & M_4 + M_5 + M_6 + (1600 + 200 - 150 + 200) = 0. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$M_4 = +1449{,}9 \text{ mkg}, \qquad M_5 = +98{,}5 \text{ mkg}, \qquad M_6 = -3398{,}5 \text{ mkg}.$$

(M_R war eine Zwischenlösung, die zur Ermittlung der Stabkraftmomente nicht nötig war, da die Gleichgewichtsbetrachtungen auch sofort für alle Momente hätte aufgestellt werden können.)

Für eine zeichnerische Durchführung der Lösung wählt man zwei Seitenrisse, in denen sich je zwei unbekannte Vektoren decken; in diesen ist mit Kraft- und Seileck eine Lösung für

die parallelen Vektoren möglich. Oder man benutzt das resultierende Moment M_R, setzt es mit M_6 und dem resultierenden Momentenvektor M_{45} (aus M_4 und M_5) ins Gleichgewicht und zerlegt danach M_{45} in seine Bestandteile M_4 und M_5. Das Gleichgewichts- und nachfolgende Zerlegungsproblem geht in Ebenen vor sich, die durch die Verbindungslinien der Punkte M'_R, M'_6 bzw. M'_4, M'_5 festgelegt sind und senkrecht zur Abbildungsebene stehen.

Die jetzt bekannten Momente M_4, M_5, M_6 liefern mit den Zugehörigkeitsgleichungen die Kräfte n den Wirkungslinien der Bildkräfte. Es ist $S' = M \frac{l'}{\xi y - \eta x}$, also

$$S'_4 = +1449{,}9 \cdot \frac{2{,}693}{-12{,}5} = -312{,}4 \text{ kg},$$

$$S'_5 = +\ 98{,}5 \cdot \frac{2{,}062}{-10{,}25} = -\ 19{,}8 \text{ kg},$$

$$S'_6 = -3398{,}45 \cdot \frac{2{,}915}{+11{,}25} = -880{,}6 \text{ kg}.$$

Das nun noch übrigbleibende Problem, die gegebenen Bildkräfte P'_1, P'_2, S'_4, S'_5, S'_6 mit den drei unbekannten Kräften S'_1, S'_2, S'_3 ins Gleichgewicht zu setzen, wird am einfachsten mit dem Krafteck und Seileck für diese zerstreut in der Abbildungsebene liegenden Kräfte oder mit dem Culmannschen Verfahren erledigt (vgl. Abb. 3). Als Endergebnisse erhalten wir die Werte der folgenden Tabelle 3:

Tabelle 3. *Ergebnisse für das Beispiel I.*

Stab	1	2	3	4	5	6
S' = [kg]	− 738	+ 155	−285	−312	−20	− 881
$Z^* = S' \frac{a}{c}$ = [kg]	+ 738	−1939	+336	+522	+38	+ 755
$S = \sqrt{S'^2 + Z^{*2}}$ = [kg]	−1043	+1946	−441	−608	−43	−1160

Treten in der dualen Abbildung mehr als drei unbekannte Momentenvektoren auf, so ist das Problem des räumlichen Anschlusses nicht mehr direkt zu behandeln. Die Gesamtzahl der Gleichgewichtsbedingungen stimmt selbstverständlich bei statisch bestimmten Lagerungen mit der Anzahl der Unbekannten überein, aber es lassen sich die Gleichgewichtsbedingungen für die Stabkraftlinien nicht ohne weiteres mit denen für die Momentenvektoren austauschen. Treten beispielsweise vier unbekannte Momentenvektoren auf, so genügen die Bedingungen der Momentengruppe nicht zur Bestimmung der unbekannten Vektorbilder. Wären diese vier Größen aber bestimmt, dann ist für die daraus zu ermittelnden Stabkraftbilder und die zwei noch unbekannten Bildkräfte wieder eine Gleichgewichtsbedingung zuviel da. Eine direkte Lösung des Sechsstabanschlusses ist offenbar nur dann zu erreichen, wenn die sechs Gleichgewichtsaussagen in zwei Stufen, drei für die Momentenvektoren, drei für die Kraftbilder, angesetzt werden können.

5. Lösung des Sechsstabanschlusses, bei dem sich je zwei Stäbe schneiden. An einem zweiten Beispiel (Abb. 4) zeigt sich, wie die Trennung der Gleichgewichtsbedingungen für die direkte Behandlung unbedingt nötig ist und im Falle von vier Momentenvektoren eine Vieldeutigkeit zurückbleibt, die erst bei Betrachtung der nun überzähligen Kraftbedingungen (eventuell durch Probieren) beseitigt werden könnte.

Beispiel II stellt eine Lagerung dar, bei der sich je zwei Stäbe schneiden (Dreipunktanschluß mit je zwei Stäben). Für die duale Abbildung wählen wir die Abbildungsebene wieder parallel zur Grundrißtafel und nehmen als Bezugspunkt A des Raumsystems zunächst den Schnittpunkt zweier Stäbe (hier 1 und 2). Die dafür ermittelbaren Kennzahlen der dualen Abbildung sind in der Tabelle 4 zusammengestellt.

Im dualen Bild erscheinen jetzt vier Momentenvektoren, die zwar eine spezielle Lage haben, trotzdem aber nicht direkt zur Lösung führen. Die Schnittpunkte der drei Stabpaare liegen in einer Ebene parallel zur Grundrißtafel. Alle Strecken in dieser Ebene bilden sich im dualen Bild als Geraden durch den Bezugspunkt O ab, da sie keine z-Komponenten haben, also nicht aus O verlagert sind. Eine Gerade zwischen zwei Stabschnittpunkten (z. B. Verbindungslinie $A\,B$) erscheint im Dualbild parallel und durch O gehend. Dieses Bild der Geraden muß nun auch die Fußpunkte der Momentenvektoren für die Stäbe enthalten, die sich auf ihr schneiden. So erscheint die Gerade $A\,B$ als Linie $m_{3\,4}$, die Gerade $A\,C$ als Linie $m_{5\,6}$, von denen die erstere

die Fußpunkte M_1', M_2', M_3', M_4' enthält, die letztere die Fußpunkte M_1', M_2', M_5', M_6'. (Da der Schnittpunkt der Stäbe 1 und 2 als Bezugspunkt A gewählt wurde, verschwindet M_1 und M_2, damit auch deren Fußpunkte.)

Damit ergibt sich eine sehr brauchbare Kontrolle für die Abbildungswerte, die sich für die gegebene Sonderlage sogar soweit auswirkt, daß die Lage der Momentenfußpunkte überhaupt

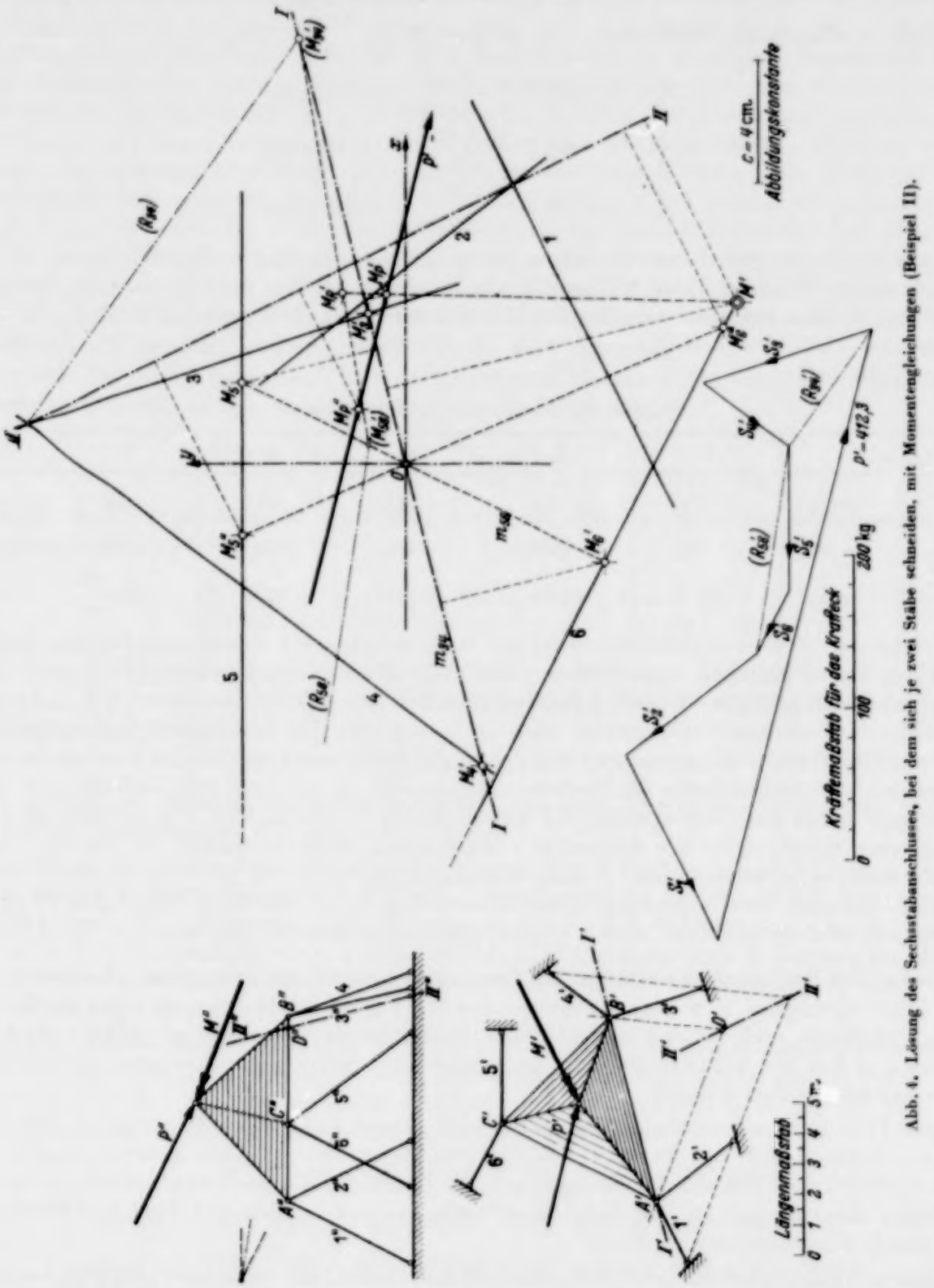

Abb. 4. Lösung des Sechsstabanschlusses, bei dem sich je zwei Stäbe schneiden, mit Momentengleichungen (Beispiel II).

nicht errechnet werden braucht, sondern sich durch die Schnittpunkte der Geraden m_{34} und m_{56} mit den jeweiligen Bildkraftlinien in der dualen Abbildung ergibt. Für die vier Momentenvektoren stehen nun drei Gleichgewichtsbedingungen zur Verfügung, d. h. die Aufgabe ist so nicht zu lösen.

Um zu einem allgemeingültigen Verfahren zu kommen, müssen wir versuchen – wenn die Zurückführung der Aufgabe auf drei Momentenvektoren nicht gelingt –, auf irgendeinem Wege

Tabelle 4. *Abbildungswerte für die Lösung des Beispiels II.*

Stab	Kraftdarstellung: Komponenten (Länge, Kraft usw.) x_i	y_i	z_i	Abbildungswerte l'	a_i	Lage eines Punktes zum Pol A: ξ_A	η_A	ζ_A	Lage eines Punktes zum Pol D: ξ_D	η_D	ζ_D	Momentendarstellung: Momentenvektor für Pol A (M_x) $\xi y-\eta x$	Ab_x	Ab_y	Momentenvektor für Pol D Db_x	Db_y
1	−2	−1	−4	2,236	−7,156	0	0	0	−5,62	+2,10	0	0	−	−	+9,15	− 3,42
2	+2	−2,5	−4	3,202	−4,997	0	0	0	−5,62	+2,10	0	0	−	−	+9,13	− 3,41
3	+1	−3	−4	3,162	−5,060	+6	+1,5	0	+0,38	+3,60	0	−19,5	+4,92	+ 1,23	+1,28	+12,15
4	+1,5	+2	−4	2,5	−6,40	+6	+1,5	0	+0,38	+3,60	0	+ 9,75	−9,85	+ 2,46	+1,30	+12,14
5	+3	0	−4	3	−5,333	+2,5	+5	0	−3,11	+7,09	0	−15,0	+2,67	+ 5,33	−2,34	+ 5,33
6	−2	+1	−4	2,236	−7,156	+2,5	+5	0	−3,11	+7,09	0	+12,5	−3,20	+ 6,40	+4,49	−10,25
P	+400	−100	−200	412,3	−1,940	+3,2	+2,5	+3	−2,43	+4,60	+3	−1320	+5,58	+ 0,61	+1,79	+ 1,55
M	−400	−200	+150	−	−	−	−	−	−	−	−	+150	+5,33	−10,67	+5,33	−10,67

zu einer neuen Aussage zu kommen, die uns die überzähligen Momentenvektoren lösen hilft. Der allgemein belastete, mit sechs windschiefen Stäben gelagerte Körper kann nach den Gesetzen der Raumstatik durch Momentengleichungen um sechs Achsen in allgemeiner Lage gelöst werden. Die Auswahl der Achsen ist sonst beliebig, sie können z. B. so angeordnet werden, daß je zwei von ihnen vier Stäbe schneiden. Es lassen sich nämlich immer durch vier allgemein angeordnete (windschiefe) Geraden je zwei Achsen legen, die alle vier Geraden schneiden. (Drei Stäbe bilden ein einschaliges Hyperboloid, dessen Mantelfläche von dem vierten Stab im allgemeinen an zwei Stellen durchstoßen wird; in diesen Durchstoßpunkten lassen sich dann die zwei Achsen zeichnen, die auch die drei ersten Stäbe schneiden.) Damit sind drei Gruppen von je zwei Gleichungen entstanden, von denen jede Gruppe selbständig zwei Unbekannte löst.

Da sich nun durch die duale Abbildung Ebenen in Punkte, Geraden in Geraden und Punkte in Ebenen verwandeln, müßten sich die ausgezeichneten Momentenachsen wieder als Geraden darstellen. Um diese kann dann wieder eine Momentengleichung angesetzt werden, die die gleichen Unbekannten aufweisen müßte wie die Momentengleichung um die entsprechende Achse im Raumsystem, denn es ist jeder Gleichgewichtsbedingung im Raum eine entsprechende Bedingung im Dualbild eindeutig umkehrbar zugeordnet. Mit zwei solchen Momentengleichungen müßte es dann möglich sein, die überzähligen Momentenvektoren des Problems zu lösen.

Zur selbständigen Errechnung z. B. der Stabkräfte in 5 und 6 würden im Raumsystem zwei Achsen gewählt werden, die die Stäbe 1, 2, 3, 4 schneiden, das ist hier die Verbindungsgerade *A B* der Schnittpunkte je zweier Stäbe und die Schnittgerade der Ebene 1/2 mit der Ebene 3/4. Die beiden Achsen sind in der Abb. 4 mit *I,I* und *II,II* bezeichnet. Bilden wir diese beiden Achsen nun in dem dualen Bild ab, so erscheint die Achse *I,I* als Gerade durch den Koordinatenanfang *O* (Linie m_{34}), und die Schnittlinie *II,II* der beiden Ebenen stellt sich als Verbindungsgerade der beiden Schnittpunkte der Bildkraftlinien 1/2 und der Bildkraftlinien 3/4 dar. Diese letzten Punkte versinnbildlichen nämlich im Dualbild die Ebenen der zugehörigen Stäbe.

Die Momentenfußpunkte der Lagenmomente im Dualbild stellen die Wirkungsebenen dieser Momente dar. Wenn wir nun die Momente der Stabkräfte für einen Punkt auf den beiden Schnittachsen *I,I* und *II,II* aufstellen und sie abbilden, müssen die Momentenfußpunkte auch auf den Bildern dieser beiden Achsen liegen, weil diese Achsen dann ja im Raumsystem in den Wirkungsebenen der Stabmomente enthalten sind. Die Stabbilder selbst sind unabhängig von der Wahl der Bezugspunkte; das abgebildete Stabsystem, einschließlich der Bilder der Achsen, liefert damit sofort die Momentenfußpunkte der vier Stabmomente als Schnittpunkte von Achsenbild und Stabbild. Zur Fertigstellung des Lösungsbildes bleibt dann nur noch übrig, die Momentenfußpunkte der gegebenen Kräfte und Momente und die der Stäbe 5 und 6 für einen Raumbezugs-

punkt A auf der Achse I,I und einen zweiten Bezugspunkt D auf der Achse II,II zu ermitteln. Das fertige Bild muß dann die Möglichkeit geben, geradeso wie die zugehörigen Achsen im Raum, zwei selbständige Momentengleichungen aufzustellen für die Stabkräfte in 5 und 6. Zur Bestätigung dieser Betrachtungen sind in der Tabelle 4 alle Abbildungswerte für Kräfte, Momente und Stäbe in bezug auf die Raumpunkte A und D aufgeschrieben, die noch ergänzt werden könnten durch die Abbildungswerte der Achsen I,I und II,II: Achse I,I hat $z=0$, daher $a=0$, d. h. die zugehörige Abbildungsgerade geht durch Punkt O und verläuft parallel dem Grundrißbild $A'\ B'$ des Raumsystems. Achse II,II hat für eine im Grundriß gemessene Länge $l'=2{,}42$ cm, $z=-4$ cm, dämit $a=-6{,}612$ cm.

Wir sehen, daß, wie wir erwartet haben, die Momentenvektoren der Kräfte 1, 2, 3, 4 auf der Momentenachse I,I bzw. II,II stehen, d. h., daß um diese Achsen im Dualbild Momentengleichungen für die Bildvektoren der Lagenmomente aufgestellt werden können, in denen als Unbekannte nur die beiden Momente M_5 und M_6 vorkommen. Nun ist aber zu bedenken, daß für die verschiedenen Bezugspunkte A und D die Lagenmomente der Kräfte nicht gleich sind, daß also auch die Momentenvektoren dazu in der dualen Abbildung nicht die gleiche Größe haben werden. Die bekannten Kräfte und das vom Bezugspunkt unabhängige gegebene Moment liefern natürlich sofort die richtigen Größen (s. Tabelle 4), für die beiden unbekannten Stabkräfte können wir dagegen zunächst nur eine Verhältnisgleichung angeben. Es ist die Größe des Momentenvektors M für die Stabkraft S^* bzw. ihre Grundrißprojektion (Dualbild) S' gegeben durch die Gleichung

$$M=S'\,\frac{\xi\,y-\eta\,x}{l'}.$$

Bezeichnen wir nun den Abbildungswert des Lagenmomentes von S_5 für den Bezugspunkt A mit M_5^A (Fußpunkt M_5') und für den Bezugspunkt D mit M_5^D (Fußpunkt M_5''), so ergibt sich mit den der Tabelle 4 zu entnehmenden Werten für $(\xi\,y-\eta\,x)$

$$\frac{M_5^D}{M_5^A}=\frac{-21{,}27}{-15{,}0}=1{,}4180,\qquad \frac{M_6^D}{M_6^A}=\frac{+11{,}07}{+12{,}50}=0{,}8856.$$

Die Momentengleichungen um die Achsen lauten

$$\Sigma M_I=0:\ 150\cdot 11{,}63-1320\cdot 0{,}75-M_5^A\cdot 4{,}51+M_6^A\cdot 5{,}45=0,$$
$$\Sigma M_{II}=0:\ 150\cdot 6{,}69-1597\cdot 4{,}33+M_5^D\cdot 6{,}35+M_6^D\cdot 7{,}21=0.$$

Die Hebelarme sind aus der Zeichnung abgegriffen (in Bild 4 gestrichelt eingezeichnet). Unter Verwendung unserer Beziehungen zwischen M_5^A, M_6^A und M_5^D, M_6^D wird daraus

$$150\cdot 11{,}63-1320\cdot 0{,}75-M_5^A\cdot 4{,}51\qquad +M_6^A\cdot 5{,}45\qquad =0,$$
$$150\cdot 6{,}69-1597\cdot 4{,}33+M_5^A\cdot 6{,}35\cdot 1{,}418+M_6^A\cdot 7{,}21\cdot 0{,}8856=0.$$

Wir finden aus diesen beiden Gleichungen

$$M_5^A=+475{,}6\text{ mkg},\quad M_6^A=+255{,}1\text{ mkg}.$$

Bleiben wir bei der weiteren Lösung nun im Abbildungssystem des Bezugspunktes A und setzen hier die bekannten Momentenvektoren M_P^A und M zum resultierenden Vektor M_R^A zusammen, so hat dieser die Größe

$$M_R^A=-1320+150=-1170\text{ mkg}$$

und steht im Fußpunkt M_R' auf der Verbindungslinie $M'\ M_P'$ in einer Entfernung e vom Punkt M'

$$e=\frac{11{,}29\cdot 1320}{1170}=12{,}74\text{ cm}.$$

Die Resultierende aus M_5^A und M_6^A hat die Größe

$$M_{56}^A=255{,}1+475{,}6=730{,}7\text{ mkg}$$

und liegt auf der Verbindungsgeraden $M_5'\ M_6'$ im Fußpunkt M_{56}' in einer Entfernung e' vom Fußpunkt M_6'

$$e'=\frac{13{,}12\cdot 475{,}6}{730{,}7}=8{,}54\text{ cm}.$$

Die Resultierende M_{34}^A der beiden Momentenvektoren M_3^A und M_4^A liegt nun einerseits auf der Geraden $M_{56}'\ M_R'$, andererseits auf der Geraden $M_3'\ M_4'$. Außerdem muß sich die Lage des Fuß-

punktes auch ergeben durch eine Gleichgewichtsbetrachtung der drei Vektoren M_{56}^A, M_R^A und M_{34}^A auf der durch die drei Fußpunkte gehenden Geraden, so daß wir hier bereits eine Kontrolle für die Richtigkeit unserer Rechnung haben.

Aus $\Sigma M = 0$ wird

$$M_R^A + M_{56}^A + M_{34}^A = 0, \qquad -1170 + 730{,}7 + M_{34}^A = 0$$

und somit

$$M_{34}^A = +439{,}8 \text{ mkg}.$$

Zerlegen wir weiter M_{34}^A in seine Bestandteile M_3^A und M_4^A, so ergeben sich daraus

$$M_3^A = +705{,}8 \text{ mkg}, \qquad M_4^A = -266{,}5 \text{ mkg}.$$

Mit den Zugehörigkeitsgleichungen

$$S' = M \frac{l'}{\xi y - \eta x}$$

wird dann aus

$$M_3^A = +705{,}8: \quad S_3' = +705{,}8 \cdot \frac{3{,}162}{-19{,}5} = -114{,}45 \text{ kg},$$

$$M_4^A = -266{,}5: \quad S_4' = -266{,}5 \cdot \frac{2{,}5}{+9{,}75} = -68{,}33 \text{ kg},$$

$$M_5^A = +475{,}6: \quad S_5' = +475{,}6 \cdot \frac{3}{-15{,}0} = -95{,}12 \text{ kg},$$

$$M_6^A = +255{,}1: \quad S_6' = +255{,}1 \cdot \frac{2{,}236}{+12{,}5} = +45{,}63 \text{ kg}.$$

Die beiden Stabkräfte S_1' und S_2' im Dualbild werden dann noch mit Hilfe eines geschlossenen Krafteeks bestimmt, aus dem wir entnehmen

$$S_1' = +134{,}2 \text{ kg}, \quad S_2' = -107{,}0 \text{ kg}.$$

Eine weitere Kontrolle für die Richtigkeit der Bildstabwerte ist nun noch dadurch gegeben, daß die Einzelresultierenden R_{34}' und R_{56}' in den angegebenen Wirkungslinien der dualen Abbildung liegen müssen, und daß außerdem das Seileck aller Stabkräfte im dualen Bild geschlossen sein muß, bzw. die Resultierende der Kräfte P', S_3', S_4', S_5', S_6' durch den Schnittpunkt der Bildkraftlinien 1 und 2 gehen muß.

Zur Gewinnung der wirklichen Stabkräfte S^* des Raumsystems errechnen wir die Größen der Kräfte mit der Beziehung

$$S^* = S' \sqrt{1 + \left(\frac{a}{c}\right)^2}$$

oder, da wir auch die Komponenten der Kraft mit den entsprechenden Koordinaten der Stablängen vergleichen können, die leicht aus der Tabelle 4 zu entnehmen sind,

$$S^* = S' \frac{l}{l'} \quad \text{(Tabelle 5)}.$$

Tabelle 5. *Zur Ermittlung der wirklichen Stabkräfte für Beispiel II.*

Stab	1	2	3	4	5	6
$S' = [\text{kg}]$	+134,2	−107,0	−114,5	− 68,3	− 95,1	+45,6
$l = [\text{m}]$	4,58	5,12	5,10	4,72	5,00	4,58
$l' = [\text{m}]$	2,24	3,20	3,16	2,50	3,00	2,24
$S^* = [\text{kg}]$	+275	−171	−185	−129	−159	+92

6. Die zeichnerische Lösungsmöglichkeit für den Dreipunktanschluß. Die Aufgabe des Dreipunktanschlusses, bei dem sich je zwei der sechs Stäbe schneiden, läßt sich durch eine einfache Umordnung der Unbekannten auch rein graphisch durchführen. Die drei Gruppen der je zwei sich schneidenden Stäbe stellen für die Lagerung drei Ebenen dar, die als Lagerebenen in jeder beliebigen Art festgelegt werden können (z. B. auch durch ein Lager mit zwei Unbekannten). Die drei Lagerebenen schneiden sich in einem Punkt. Wenn wir nun in jeder Ebene eine Kraftkomponente nach diesem Schnittpunkt festlegen, während wir über die zweite keine besondere Aussage zu machen brauchen, dann erhalten wir mit diesen Ersatzkräften ein Problem mit nur drei Momentenvektoren, das nach Beispiel *I* (Abb. 3) auf zeichnerischem Wege gelöst werden kann.

Die Durchführung einer solchen Aufgabe betrachten wir an Hand des Beispiels *III* (Abb. 5). Zur Ermittlung des Schnittpunktes der drei Ebenen bringen wir zunächst die Ebene 1/2 mit der Ebene 3/4 zum Schnitt und bestimmen dann den Durchstoßpunkt *A* dieser Schnittgeraden

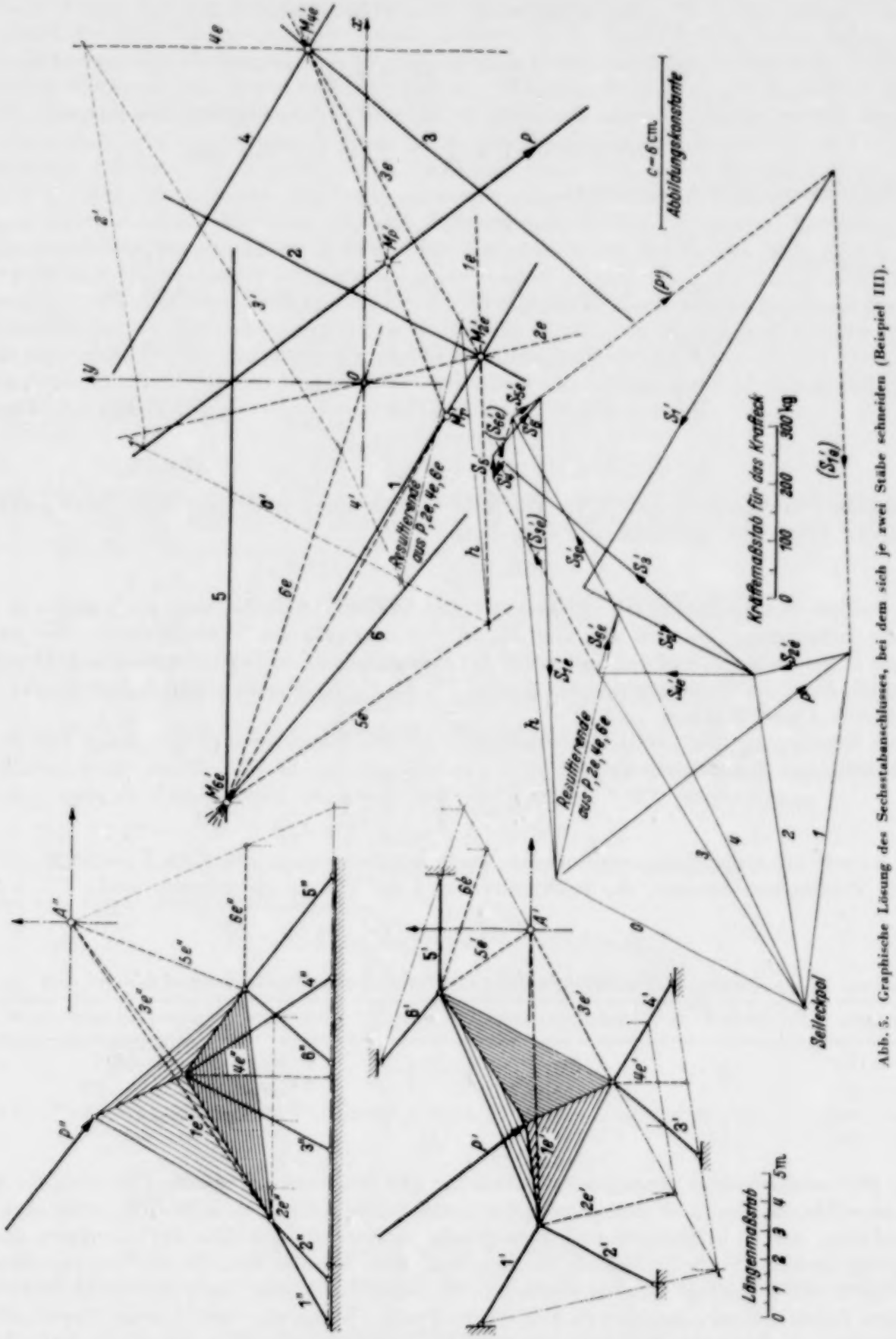

Abb. 5. Graphische Lösung des Sechsstabanschlusses, bei dem sich je zwei Stabe schneiden (Beispiel III).

durch die Ebene 5/6. Dieser Punkt *A* dient als Bezugspunkt des Raumsystems für die Darstellung der dualen Bilder. Ersetzen wir nun die Stäbe 1 und 2 durch die beiden Wirkungslinien $1e$ und $2e$, von denen $1e$ durch den Bezugspunkt *A* geht, $2e$ dagegen beliebige Lage haben

kann, z. B. hier parallel zur Grundrißtafel liegt, dann besitzt $1e$ kein Lagenmoment für Punkt A. Die Abbildung dieser Kraftwirkungslinie hat damit auch keinen Momentenvektor. In gleicher Weise gehen wir in den beiden übrigen Ebenen vor, je eine der Ersatzkräfte geht durch Punkt A ($3e$ und $5e$), während die andere beliebige Lage haben kann. Wir müssen natürlich vermeiden, daß die sechs Ersatzkräfte eine spezielle Lage haben, z. B. dürfen nicht alle drei freien Komponenten parallel zum Grundriß gewählt werden, da sonst drei Kräfte in einer Ebene liegen, während die drei anderen durch einen Punkt gehen. Damit wäre das Raumsystem nicht unverschieblich gelagert und wir erhielten demgemäß auch keine Gleichgewichtslösung. Zur Vermeidung dieser Sonderlage ist deshalb hier $2e$ und $6e$ horizontal (ohne z-Komponente) und $4e$ ohne x-Komponente in die zugehörigen Ebenen eingeordnet.

Die sechs Ersatzgeraden sind nun ohne weitere Rechnung in das Bild der dualen Stabwirkungslinien einzutragen. Es wird die Ebene zweier sich schneidender Stäbe im dualen Bild als Schnittpunkt der beiden zugeordneten Geraden erscheinen. Alle Geraden, die im Raumsystem in dieser Ebene liegen, müssen im Dualbild durch diesen Punkt gehen. Nun ist aber $2e$ ohne z-Komponente gewählt, also geht die zugehörige Bildwirkungslinie durch den Koordinatenanfangspunkt O und den Schnittpunkt der Stäbe 1/2. Sie muß außerdem auch parallel der Grundrißprojektion $2e'$ verlaufen, so daß wir hiermit schon wieder eine Kontrolle für die Abbildung haben, die noch erweitert werden kann durch Errechnen des Momentenfußpunktes M'_{2e}, der ebenfalls auf dieser Linie liegen muß. Das Lagenmoment M_{2e} wirkt in der Ebene 1/2, da sowohl der Momentenbezugspunkt A wie auch die Kraftlinie $2e$ dieser Ebene angehören. Das bedeutet, daß der Vektor im Schnittpunkt der Bildkraftlinien 1 und 2, der ja diese Ebene charakterisiert, liegen muß. Die gleichen Überlegungen führen für die Ersatzkraft $6e$ zur Lage der Bildkraftlinie und des Momentenfußpunktes M'_{6e}. Für die Ersatzkraft $4e$ haben wir mit ähnlichen Überlegungen das Bild der Linie $4e$ durch den Schnittpunkt der Linien 3, 4 parallel der y-Achse und den Fußpunkt M'_{4e} auf dem Schnittpunkt der Bildlinien 3 und 4 festzulegen. Die Bildlinien für $1e$, $3e$ und $5e$ gehen parallel zum Grundriß durch die Abbildungspunkte der zugehörigen Ebenen. Damit sind die Ersatzkräfte $1e$ bis $6e$ ohne neue Rechnung einzuzeichnen.

Zur Kontrolle der Genauigkeit unserer Abbildung können natürlich die Abbildungswerte für eine beliebige Länge l'_i der Ersatzkraftlinien im Grundriß auch nochmals errechnet werden, die dann unsere Betrachtungen bestätigen müssen (Tabelle 6).

Tabelle 6. *Abbildungswerte zum Beispiel III für $c = 6$ cm.*

Stab	Kraftdarstellung					Momentendarstellung					
	Komponenten (Längen, Kraft)			Abbildungswerte		Lage eines Punktes der Kraft in bezug auf A			Abbildungswerte für den Momentenvektor		
	x_i	y_i	z_i	l_i	a_i	ξ	η	ζ	(M_x) $\xi y - \eta x$	b_x	b_y
1	−3,5	+2	−2	4,03	−2,978	—	—	—	—	—	—
2	−2	−4	−2	4,47	−2,683	—	—	—	—	—	—
3	−2,5	−3	−5	3,91	−7,680	—	—	—	—	—	—
4	+3,5	−2	−5	4,03	−7,444	—	—	—	—	—	—
5	+4	0	−3	4,00	−4,500	—	—	—	—	—	—
6	−2,5	+2	−3	3,20	−5,621	—	—	—	—	—	—
P	+400	−500	−300	640,3	−2,811	−6,71	+0,07	−0,86	+3327	+4,251	−0,813
$1e$	−10,21	−0,43	−6,86	10,22	−4,027	—	—	—	0	—	—
$2e$	+1,13	−4,70	0	4,83	0	−10,21	−0,43	−6,86	+48,473	+0,958	−3,985
$3e$	−5,21	−2,93	−3,86	5,98	−3,873	—	—	—	0	—	—
$4e$	0	−2,58	−5	2,58	−11,628	−5,21	−2,93	−3,86	+13,442	+11,628	+2,094
$5e$	−2,21	+3,07	−5,86	3,78	−9,302	—	—	—	0	—	—
$6e$	+4,98	−1,52	0	5,21	0	−2,21	+3,07	−5,86	−11,929	−14,678	+4,500

Lösen wir nun das System der Ersatzkräfte im dualen Bild (gestrichelt eingezeichnete Kraftwirkungslinien), so treten nur drei Momentenvektoren auf. Diese sind nach Art des Beispiels I in zwei Seitenrissen zeichnerisch zu bestimmen. Die Lösung ist aber noch bequemer mit zwei Momentengleichungen zu erreichen: Verbinden wir Punkt M'_{4e} mit M'_P und M'_{2e} mit M'_{6e}, so schneiden sich die beiden Verbindungsgeraden in einem Punkt M'_r, der den Fußpunkt für den resultierenden Momentenvektor M_r von M_{2e} und M_{6e} vorstellt. M_P ist dann in der Ebene senkrecht zur ersten Verbindungslinie ins Gleichgewicht zu setzen mit M_{4e} und M_r.

Mit $M_P = +3327$ mkg und den aus der Zeichnung entnommenen Längen ist

$$3327 \cdot 5{,}72 = -M_{4e} \cdot 13{,}61,$$
$$3327 \cdot 7{,}89 = -M_r \cdot 13{,}61.$$

Daraus ergibt sich

$$M_{4e} = -1398{,}3 \text{ mkg}, \quad M_r = -1928{,}7 \text{ mkg}.$$

Wir zerlegen weiter M_r in seine Bestandteile M_{2e} und M_{6e}

$$1928{,}7 \cdot 15{,}44 = M_{2e} \cdot 17{,}79,$$
$$1928{,}7 \cdot 2{,}35 = M_{6e} \cdot 17{,}79.$$

Wir erhalten

$$M_{2e} = -1673{,}9 \text{ mkg}, \quad M_{6e} = -254{,}8 \text{ mkg}.$$

Als Kontrolle für die Rechnung prüfen wir nach

$$\Sigma M = 0: \; -1398{,}3 - 1673{,}9 - 254{,}8 + 3327 = 0.$$

Mit den Zugehörigkeitsgleichungen für Stabkraft und Lagenmoment

$$S' = M \frac{l'}{\xi y - \eta x}$$

erhalten wir dann die Größen der Abbildungskräfte

$$S'_{2e} = -1673{,}9 \cdot \frac{4{,}83}{+48{,}47} = -166{,}8 \text{ kg},$$

$$S'_{4e} = -1398{,}3 \cdot \frac{2{,}58}{+13{,}44} = -268{,}4 \text{ kg},$$

$$S'_{6e} = -254{,}8 \cdot \frac{5{,}21}{-11{,}93} = +111{,}3 \text{ kg}.$$

Die Kraft P, bzw. ihre Grundrißprojektion $P' = 640{,}3$ kg, läßt sich mit den nun bekannten drei Kräften in $2e$, $4e$ und $6e$ mit Hilfe von Krafteck und Seileck zu einer Resultierenden zusammensetzen, und wir können dann mit dem Culmannschen Verfahren (oder mit Kraft- und Seileck) die drei restlichen Ersatzkräfte S'_{1e}, S'_{3e} und S'_{5e} bestimmen. Der Übergang von den gewählten Ersatzkräften zu den wirklichen Abbildungskräften gestaltet sich nun höchst einfach: Nach einer Umgruppierung der Kräfte im Krafteck, so daß die gleichen Ebenen zugeordneten Kräfte zusammen liegen, lassen sich die Ersatzkräfte einfach durch die wirklichen Kräfte mit einem Krafteck ersetzen. Wir entnehmen dem Krafteck in Abb. 5 die Werte für die Stabkraftgrößen

$$S'_1 = 843 \text{ kg}, \quad S'_3 = 567 \text{ kg}, \quad S'_5 = 40 \text{ kg},$$
$$S'_2 = 330 \text{ kg}, \quad S'_4 = 34 \text{ kg}, \quad S'_6 = 130 \text{ kg}.$$

Die Richtungspfeile des Kraftecks, in den Grundriß übertragen, liefern sofort das Vorzeichen der Stabkräfte, es wird 1, 2, 5 Zugstab und 3, 4, 6 Druckstab. Die wirklichen Stabkraftgrößen des Raumsystems ermitteln wir wieder mit $S^* = S' \, l/l'$; ihre Werte sind in der Tabelle 7 zusammengestellt.

Tabelle 7. *Die wirklichen Stabkräfte für Beispiel III.*

Stab	1	2	3	4	5	6
S' = [kg]	+843	+330	−567	−34	+40	−130
l = [m]	4,50	4,90	6,34	6,42	5,00	4,39
l' = [m]	4,03	4,47	3,91	4,03	4,00	3,20
S^* = [kg]	+941	+362	−920	−54	+50	−178

Die den letzten Beispielen zugrunde liegende Lagerung des Raumsystems in drei Ebenen (mit 3mal 2 Stäben, die sich schneiden) ist in Wirklichkeit von viel allgemeinerer Bedeutung als es zunächst aussieht. Es ist jede statisch bestimmte Lagerung, bei der eine Ebene vorkommt, auf das oben beschriebene Drei-Ebenen-Problem zurückzuführen. Eine Lagerung mit sechs Stäben, von denen zwei in einer Ebene liegen, kann auf die Stabanordnung in drei Punkten, in denen sich je zwei Stäbe schneiden, gebracht werden. Nehmen wir einmal den Fall an, es schneiden sich bei einem mit sechs Stäben gelagerten Körper die Stäbe 1 und 2 in einem Punkt, dann lassen sich die Durchstoßpunkte zweier weiterer Stäbe, z. B. 3 und 4, durch die Ebene

der Stäbe 1/2 bestimmen und die Stabkräfte 1 und 2 ersetzen durch Ersatzkräfte 1*e* und 2*e*, deren Wirkungslinien von diesem Schnittpunkt nach den Durchstoßpunkten verlaufen. Damit sind dann schon zwei Ebenen bestimmt. Wir nehmen dann die Durchstoßpunkte der beiden restlichen Stäbe durch eine der neuen Ebenen, z. B. 3/1*e*, und ziehen in gleicher Weise die Verbindungslinien 3*e*, 1*f* der Durchstoßpunkte von 5 und 6 mit dem Schnittpunkt 3, 1*e* als neue Kraftwirkungslinien ein, dann ist der Drei-Ebenen-Anschluß schon erreicht. Das Ersatzkraftsystem 1*f*, 2*e*, 3*e*, 4, 5, 6 ist dann eine Aufgabe, wie sie in den Beispielen II und III besprochen sind, die also analytisch oder graphisch durchzuführen ist, und durch einfache Ersatzkraftecke wieder auf die ursprünglichen Stabkräfte umzuformen ist.

7. Lösung für die allgemeine Lagerung mit sechs windschiefen Stäben. Die allgemeinste Lagerung mit sechs windschiefen Kräften, die bei den Lagerungsarten der Praxis allerdings nur ganz selten vorkommt, erfordert in der dualen Abbildung die Lösung von fünf Momentenvektoren, ist also nicht direkt mit einer Abbildung zu erledigen. Wir benutzen hier wieder den Satz, daß durch vier windschiefe Stabkraftlinien stets zwei Achsen zu legen sind, die alle vier Stäbe treffen. Wählen wir den Bezugspunkt des Raumsystems nun auf einer solchen Achse, dann liegen alle Wirkungsebenen der vier Lagenmomente im Raum so, daß sie diese Achse enthalten. Die Punkte im Dualbild, die die einzelnen Wirkungsebenen in der dualen Abbildung charakterisieren, müssen demnach auf dem Dualbild der Achse liegen. Das bedeutet, daß die Fußpunkte der vier Momentenvektoren der getroffenen Stäbe auf der Zuordnungslinie der Aehse liegen, bei einer Momentengleichung um diese Achse also verschwinden. Nun gibt es zwei solcher Achsen für je vier Stäbe, wir können also auch zwei Momentengleichungen aufstellen, die die gleichen zwei Stabmomente (der nicht getroffenen Stäbe) enthalten. Damit muß die Aufgabe zu lösen sein.

Betrachten wir die allgemeine Lagerung wieder an einem Beispiel IV, dessen Lagerstäbe windschief zueinander liegen (Abb. 6). Wir suchen im Raumsystem zunächst zwei Achsen, die vier Lagerstäbe, z. B. hier die Stäbe 1, 3, 4, 5, schneiden, auf denen wir je einen Bezugspunkt für die Abbildung wählen müssen. Wenn wir nur einen Punkt der zwei Achsen angeben können, können wir sogar auf die Ermittlung der Achsen selbst im Raumsystem verzichten. Zur Konstruktion der beiden Punkte stellen wir uns zunächst einmal das aus den Stäben 3, 4 und 5 hergestellte einschalige Hyperboloid vor und legen durch Stab 1 eine Ebene (hier parallel zur Grundrißtafel). Das Hyperboloid schneidet als Durchdringungsfigur in der Ebene eine Kurve zweiter Ordnung aus. Die Schnittpunkte dieser Kurve mit dem Stab 1 sind dann zwei Punkte, die auf den gesuchten Achsen liegen, weil sie sowohl dem Hyperboloid als auch dem Stab 1 angehören, d. h. durch sie sind je eine Gerade zu ziehen, die die vier Stäbe treffen.

Die Kurve zweiter Ordnung (meist Ellipse) ist bestimmt durch fünf Punkte, die als Durchstoßpunkte der drei Stabgeraden 3, 4 und 5 und zweier weiterer Hilfsgeraden, die wir beliebig durch die drei Stäbe einfügen können, gefunden werden. Weitere Punkte der Kurve lassen sich mit dem Pascalschen Satz der projektiven Geometrie gewinnen, und die zwei Schnittpunkte der Kurve mit der Stablinie 1 findet man am einfachsten mit dem Steinerschen Kreis. Diese Konstruktionsgrundlagen liefern die beiden Punkte *I* und *II* auf der Stabkraftlinie 1, durch die dann die Geraden durch die Stäbe 1, 3, 4, 5 gezeichnet werden könnten (eine ist angegeben).

Für diese beiden Bezugspunkte I und II läßt sich nun die duale Abbildung entwerfen. Die Bilder der Stabkraftlinien werden mit den Abständen a_i vom Bezugspunkt *O* eingetragen und die Lagenmomente sowohl für den Bezugspunkt *I* als auch für Bezugspunkt *II* aufgestellt. Die Momentenfußpunkte für die Momente um Punkt *I* bezeichnen wir mit M_i', die für Punkt *II* mit M_i''. Als Kontrolle der richtigen Ermittlung haben wir, neben der Lage der Fußpunkte auf der Bildkraftlinie, noch die Fußpunkte M_3', M_4', M_5' auf einer Geraden, der Achse *I,I*, und ebenso die Fußpunkte M_3'', M_4'', M_5'' auf einer Geraden *II,II* liegen. Diese Geraden sind die dualen Bilder der beiden Achsen, die die vier Stäbe schneiden. M_1' und M_1'' verschwinden, weil die Bezugspunkte *I* und *II* im Raumsystem auf der Kraftlinie des Stabes 1 liegen.

Stellen wir für die zwei Achsen in der dualen Abbildung die Momentengleichungen der Lagenmomente auf, so erhalten wir, mit $M_P^I = +857$ mkg und $M_P^{II} = +3155$ mkg, und den aus der Zeichnung zu entnehmenden Hebelarmen

$$\Sigma M_I = 0: \quad 857 \cdot 0{,}70 + M_2^I \cdot 9{,}91 + M_6^I \cdot 9{,}27 = 0,$$

$$\Sigma M_{II} = 0: \quad 3155 \cdot 2{,}88 + M_2^{II} \cdot 3{,}38 - M_6^{II} \cdot 3{,}45 = 0.$$

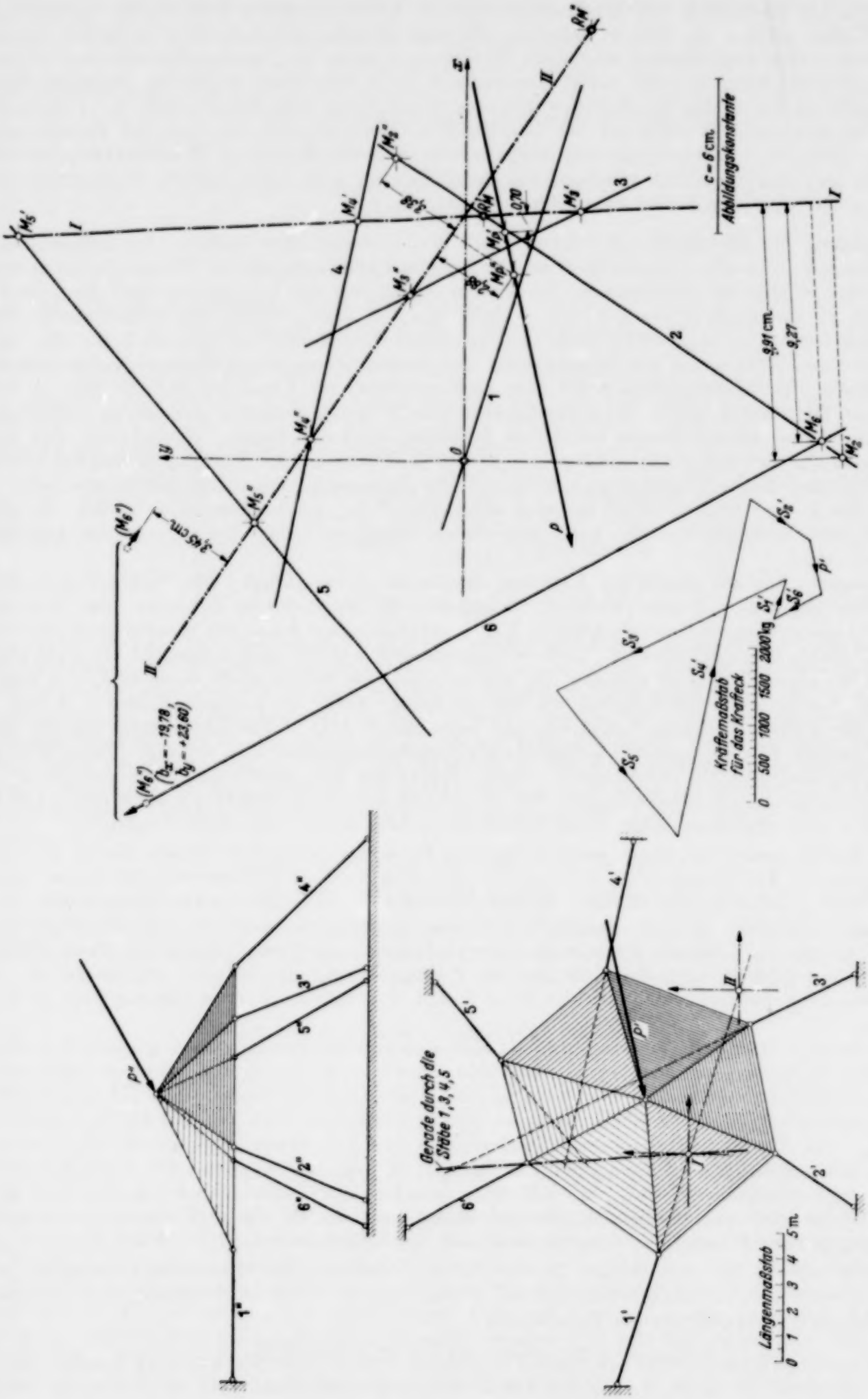

Abb. 6. Lösung des allgemeinen Raumanschlusses mit sechs windschiefen Stäben (Beispiel IV).

Tabelle 8. *Die Abbildungswerte zum allgemeinen Beispiel IV.*

Stab	Kraftdarstellung: Komponenten (Längen, Kraft) x_i	y_i	z_i	Abbildungswerte l'	a_i	Lage eines Punktes in bezug auf *I*: ξ_I	η_I	ζ_I	Momentendarstellung: Momentenvektor für Pol *I*: (M_z) $\xi y - \eta x$	Ib_x	Ib_y	Momentenvektor für Pol *II*: (M_z) $\xi y - \eta x$	IIb_x	IIb_y
1	−5	+1,5	0	5,22	0	—	—	—	0	—	—	0	—	—
2	−2	−3	−5	3,606	−8,32	−6,28	−1,41	0	−6,90	+0,348	−14,478	+16,02	+11,76	+2,64
3	+2	−4	−5	4,472	−6,71	−1,28	−0,41	0	−15,66	+9,73	−4,46	+5,94	+6,44	+2,07
4	+5	−1	−5	5,099	−5,88	+0,72	+5,09	0	−22,93	+9,26	−4,15	−26,17	+0,83	+5,84
5	+3	+2,5	−5	3,906	−7,69	−2,78	+9,09	0	−12,56	+8,55	+17,13	−34,22	−2,44	+7,97
6	−2,5	+4,5	−5	5,15	−5,82	−6,78	+8,09	0	+13,54	+0,93	−13,67	−10,29	−19,78	+23,60
P	−700	−150	−400	716	−3,35	−4,28	+3,59	+3	+857	+8,88	−1,53	+3155	+7,249	−1,875

Die Verhältnisse der beiden Momentengrößen sind mit den Werten für $(\xi y - \eta x)$ aus der Tabelle 8 aufzustellen zu

$$\frac{M_2^I}{M_2^{II}} = \frac{-6{,}90}{+16{,}02} = -0{,}4307,$$

$$\frac{M_6^I}{M_6^{II}} = \frac{+13{,}45}{-10{,}29} = -1{,}3165.$$

Setzen wir diese Verhältnisse an Stelle der Werte M_i^{II} in der zweiten Momentengleichung ein, so wird

$$857 \cdot 0{,}70 + M_2^I \cdot 9{,}91 + M_6^I \cdot 9{,}27 = 0,$$

$$3155 \cdot 2{,}88 + M_2^I \cdot \frac{3{,}38}{0{,}4307} + M_6^I \cdot \frac{3{,}45}{1{,}3165} = 0,$$

und wir finden daraus

$$M_2^I = -1768 \text{ mkg}, \quad M_6^I = +1825 \text{ mkg}$$

bzw., wenn wir die Gleichungen nach M_i^{II} auflösen,

$$M_2^{II} = +4103 \text{ mkg}, \quad M_6^{II} = -1386 \text{ mkg}.$$

Zur Bestimmung der drei anderen Momentenvektoren, deren Fußpunkte auf den beiden Achsen liegen, fassen wir erst einmal die Vektoren der bis jetzt bekannten Kräfte zu einem resultierenden Vektor R_M^I bzw. R_M^{II} zusammen. Auf der Achse *I,I* liegen M_3^I, M_4^I und M_5^I, und es muß aus Gleichgewichtsgründen auch R_M^I darauf liegen, dessen Größe sich zu

$$R_M^I = M_P^I + M_2^I + M_6^I = +578 - 1768 + 1825 = +914 \text{ mkg}$$

ergibt. Die Resultierende der Momentenvektoren M_3^I, M_4^I, M_5^I muß umgekehrt gleich groß sein, also $= -914$ mkg.

Mit der gleichen Überlegung finden wir auf der Achse *II,II* die Resultierende der bekannten Vektoren

$$R_M^{II} = M_P^{II} + M_2^{II} + M_5^{II} = +3155 + 4103 - 1386 = +5872 \text{ mkg}.$$

(Es ist hier wieder leicht eine Kontrolle einzuschalten für die seitherige Rechnung: Die Lage der resultierenden Vektoren R_M^I bzw. R_M^{II} muß sich bei einer analytischen oder graphischen Zusammensetzung auf den entsprechenden Achsen ergeben.)

Diese beiden Resultierenden der noch unbekannten Kräfte ersetzen wir auf den zugehörigen Achsen durch ihre drei Komponenten (die Momentenvektoren der gesuchten Stabkräfte). Da das nicht auf einer Achse allein geht – weil parallele Vektoren in der gleichen Ebene eindeutig nur in zwei Komponenten zerlegt werden können –, benutzen wir wieder die Doppelabbildung der Momentenfußpunkte und stellen in jeder der zwei Ebenen auf den Achsen *I,I* und *II,II* Momentengleichungen um einen Punkt des Momentenvektors M_3 auf. Es wird mit den der Zeichnung entnommenen Abständen der Fußpunkte von M_3' bzw. M_3''

Achse *I,I*: $\quad M_4^I \cdot 8{,}60 + M_5^I \cdot 21{,}63 = -914 \cdot 3{,}80,$

Achse *II,II*: $\quad M_4^{II} \cdot 6{,}80 + M_5^{II} \cdot 10{,}72 = +5872 \cdot 12{,}38.$

Daraus lassen sich die Momentengrößen unter Benutzung der Verhältnisse

$$\frac{M_4^{II}}{M_4^{I}} = \frac{-26{,}17}{-22{,}93} = 1{,}1413, \qquad \frac{M_5^{II}}{M_5^{I}} = \frac{-34{,}22}{-12{,}56} = 2{,}7245$$

finden zu

$$M_4^{I} = -20092 \text{ mkg}, \qquad M_5^{I} = +7828 \text{ mkg}.$$

Wollen wir nun auch noch den Momentenvektor für den Stab 3 ermitteln, so ergibt sich dieser aus der Gleichung

$$\Sigma M = 0: \quad +857 - 1768 + 1825 - 20092 + 7828 + M_3^{I} = 0$$

zu

$$M_3^{I} = +11350 \text{ mkg}.$$

Die Zugehörigkeitsgleichungen zwischen Momentenvektor und Bildstabkraft liefern dann die Bildstabkräfte der bisher errechneten Werte

$$S_2' = -1768 \cdot \frac{3{,}606}{-6{,}9} = +4103 \frac{3{,}606}{16{,}02} = +694 \text{ kg},$$

$$S_3' = +11350 \cdot \frac{4{,}472}{-15{,}66} = -3250 \text{ kg},$$

$$S_4' = -20092 \cdot \frac{5{,}10}{-22{,}93} = +4468 \text{ kg},$$

$$S_5' = +7828 \cdot \frac{3{,}906}{-12{,}56} = -2434 \text{ kg},$$

$$S_6' = +1825 \cdot \frac{5{,}15}{+13{,}54} = -1386 \cdot \frac{5{,}15}{-10{,}29} = 923 \text{ kg}.$$

Die Ermittlung der letzten Unbekannten, der Stabkraft S_1', bringt nun zugleich zwei Kontrollen für die ganze Lösung. Das Gleichgewichtsproblem der zerstreuten Bildkräfte vermag nämlich drei Unbekannte zu lösen, während uns nur noch eine einzige zurückgeblieben ist. Wir entnehmen dem Krafteck der Abb. 6 für die beiden Schlußstäbe $S_1' = -555$ kg und $S_3' = 3250$ kg. Das Ergebnis für S_2' dient als Kontrolle, und wir haben als letzte Prüfung der Richtigkeit der Lösung noch die Möglichkeit, ein Seileck der Bildstabkräfte einzuzeichnen, das dann geschlossen sein muß.

Aus den ermittelten Kräften S_i' in der dualen Abbildung kommen wir wieder zu den wirklichen Stabkräften S^* mit der Gleichung $S^* = S' \cdot l/l'$, deren Werte in der Tabelle 9 zusammengestellt sind.

Tabelle 9. *Die wirklichen Stabkräfte des Beispiels IV.*

Stab	1	2	3	4	5	6
S' = [kg]	−555	+694	−3250	+4468	−2434	+923
l = [m]	5,22	6,16	6,71	7,14	6,35	7,18
l' = [m]	5,22	3,61	4,47	5,10	3,91	5,15
S^* = [kg]	−555	+1186	−4875	+6257	−3954	+1287

8. Lösung für Raumfachwerke nach dem ersten und zweiten Bildungsgesetz. Mit dieser Lösungsmethode des Sechsstabanschlusses sind, im Rahmen der Lösung allgemein statisch bestimmter Anschlüsse, auch Raumfachwerke nach dem zweiten Bildungsgesetz zu lösen, bei denen zwei statisch bestimmt aufgebaute Fachwerksteile durch sechs Stäbe, oder einen Punkt und drei Stäbe, aneinander angeschlossen sind. Ebenso sind die Knotenpunktslösungen der Fachwerke, die nach dem ersten Bildungsgesetz aufgebaut sind, mit der dualen Abbildung graphisch durchzuführen. Das Problem des Fachwerks nach dem ersten Bildungsgesetz besteht bekanntlich aus einzelnen Dreibockaufgaben. Dabei kann auf eine Darstellung der Lagenmomente vollständig verzichtet werden, denn die an jedem Knoten auftretenden drei unbekannten Stabkräfte können mit der Kraftdarstellung allein gelöst werden. (Die Lagenmomente würden von selbst verschwinden, wenn der Knotenpunkt zum Bezugspunkt des Raumsystems gewählt wird.)

Die Lösung der Stabkräfte in einem nach dem ersten und zweiten Bildungsgesetz aufgebauten Fachwerk zerfällt demnach in einzelne Knotenprobleme und Sechsstabprobleme, deren Lösungen in einem Dualbild zusammengefaßt und dort als ebene Aufgaben durchgeführt werden können.

Das Beispiel V der Abb. 7 stellt ein derart aufgebautes Fachwerk dar. Wenn wir die Abbaumöglichkeit verfolgen, so liegt nach dem Abbau der oberen Spitze, der Stäbe 1, 2, 3, kein dreistäbiger Knoten mehr vor. Die Lösung kann dann durch einen Schnitt durch die sechs Stäbe 7, 8, 9, 10, 11, 12 weitergeführt werden. In gleicher Weise ist das untere Stockwerk durch einen Schnitt durch die Stäbe 16, 17, 18, 19, 20, 21 zu lösen. Wir haben also als Lösungsgrundlage die beiden Sechsstabanschlußprobleme zu erledigen und können dann mit weiteren Knotenpunktsbetrachtungen die noch fehlenden Stäbe aus ebenen Kraftgleichgewichtsproblemen finden. Die duale Abbildung der Stäbe, deren Abbildungswerte in der Tabelle 10 enthalten sind, bietet wieder zahlreiche Kontrollmöglichkeiten: Alle Stäbe, die im Raumsystem eine Ebene bilden, müssen im Dualbild durch einen Punkt gehen. (Durch Benutzung dieser Erkenntnis kann man sich natürlich auch die Errechnung zahlreicher Abbildungswerte ersparen.) Die Kraftrichtungen in den einzelnen Stäben werden für die Vorzeichen der Projektionswerte zunächst nach unten gehend angenommen, und für die in der waagrechten Ebene liegenden Stäbe sind in der Tabelle die angenommenen Richtungen eingezeichnet. Auf die Abbildung der lotrechten Kraft von 600 kg sei hier gesondert eingegangen: Die Kraft erscheint nicht im Grundriß, hat also in der dualen Abbildung, deren Ebene parallel zum Grundriß gewählt wird, keine Wirkungslinie. Der Abstand a dieser Kraft verschwindet jedoch nicht, er wird nach den Abbildungsgesetzen

$$a = c\,\frac{Z^*}{P'} = 2 \cdot \frac{600}{0} = \infty .$$

Wir erhalten damit das Bild einer Kraft 0 im Abstand ∞, was im Sinne der Statik ein Moment darstellt, das als Momentengröße den Wert $P'a = cZ^* = 1200$ cmkg besitzt. Entsprechende Sonderwerte werden wir auch bei der Darstellung des Lagenmomentes dieser Kraft zu erwarten haben, da ja keine endliche Wirkungslinie für die Kraft vorliegt, auf der die Fußpunkte der Bildmomentenvektoren liegen könnten.

Nehmen wir uns zunächst den Schnitt durch die sechs Stäbe 7, 8, 9, 10, 11, 12 vor. Den Bezugspunkt dieser Teilaufgabe im Raumsystem wählen wir so, daß er auf einer Geraden liegt, die vier Stäbe schneidet. Wir müßten dann noch einen zweiten Bezugspunkt auf der anderen Achse annehmen, die die gleichen Stäbe schneidet. Beide Bezugspunkte lassen sich jedoch vereinen. Der gewählte Punkt *I* liegt auf einer Geraden entlang des Stabes 6, die die Stabkraftlinien 7, 8 und 11, 12 trifft. Die zweite Gerade, die diese vier Stäbe schneidet, liegt entlang des Stabes 12, der hier die Schnittgerade der Ebenen 7, 8 und 11, 12 darstellt. Damit ist dieser Doppelpunkt *I*, der auch auf der Stablinie 12 liegt, für das ganze Sechsstabproblem ausreichend. Es ist Punkt *I* nicht der einzig mögliche Punkt, der diese Eigenschaften hat; es könnte jeder beliebige Punkt auf der Stablinie 12 genommen werden, da die Stäbe 7, 8, 12 eine Ebene bilden, also z. B. auch der Punkt *II*. Wir wollen hier jedoch der Allgemeinheit zuliebe beim Punkt *I* bleiben und für Punkt *II* nur das zweite Problem darstellen.

Die auf Punkt *I* bezogenen Fußpunkte sind in Abb. 7 mit M_i' bezeichnet. Eine besondere Betrachtung der Abbildung des Momentenvektors ist wieder für die lotrechte Kraft 600 kg nötig. Die Fußpunkte der Lagenmomente lassen sich wieder nicht zeichnerisch erfassen, da sie ins Unendliche fallen. Wir gehen daher auf die Definition der Momentenabbildung zurück und finden, daß

$$M\,b_y = c\,M_x^*, \quad M\,b_x = -\,c\,M_y^*,$$

d. h., daß für diese Kraft der Vektor M (der selbst ins Unendliche fällt und die Größe 0 hat) ein Moment um die y-Achse besitzen muß von der Größe

$$(M\,b_x) = -\,2 \cdot (-\,4500) = +\,9000 \text{ [cm mkg]}.$$

Dieses Moment ist in der Abbildung zu berücksichtigen und dort (mit drei Pfeilen versehen) eingezeichnet. M_x^* verschwindet, so daß mit der eben erwähnten Darstellung die Wirkung der Kraft 600 für Bezugspunkt *I* voll erfaßt ist. Die Momente der Stabkräfte S_7 und S_8 liegen in der gleichen Ebene, fallen im Dualbild also zusammen.

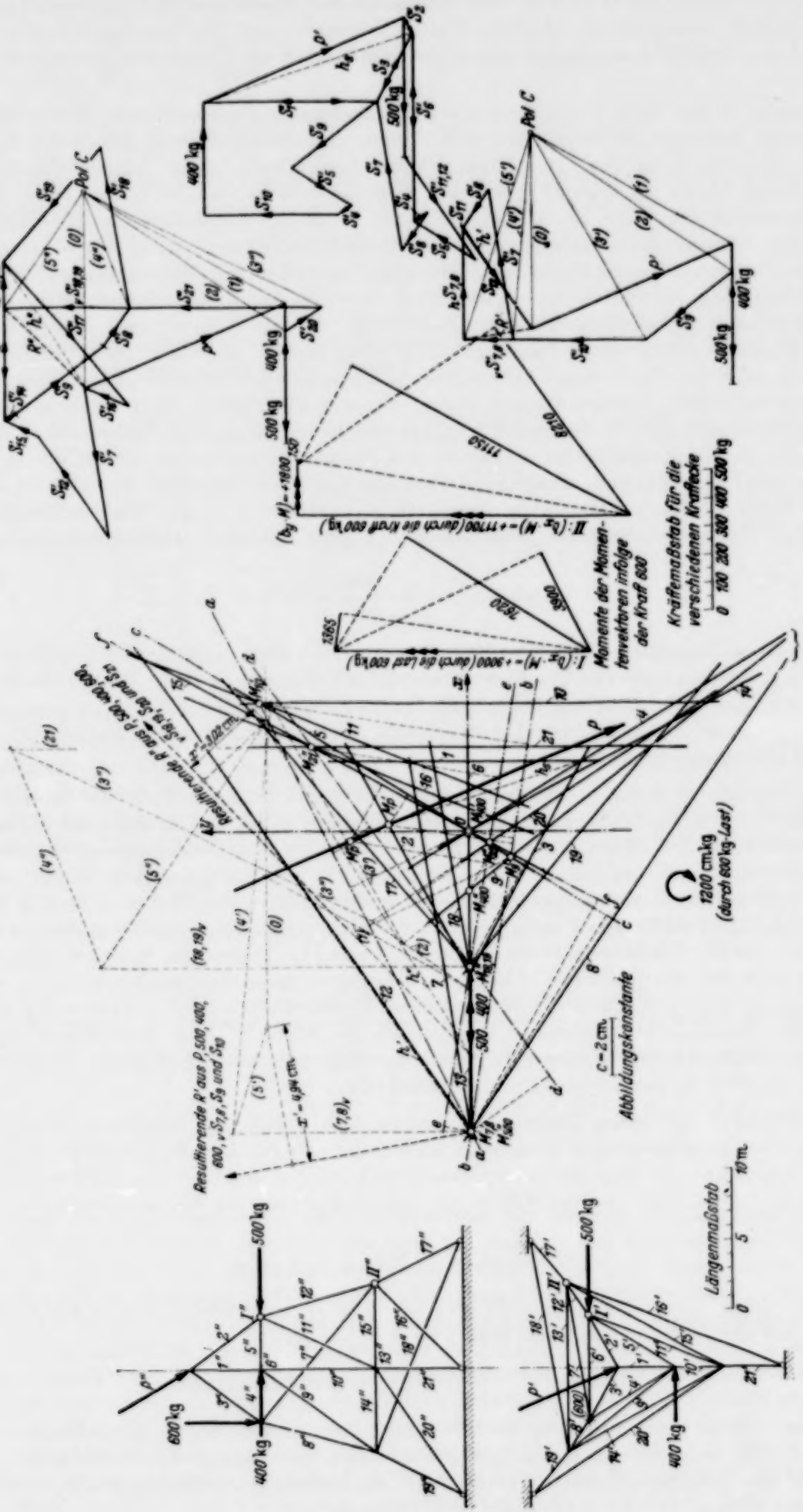
Pol C
400 kg
500 kg
Kräftemaßstab für die verschiedenen Kraftecke
0 100 200 300 400 500 kg
Momente der Momententvektoren infolge der Kraft 800
Resultierende R' aus P, 500, 400, 600, $S_{7,8}$, S_9 und S_{10}
Abbildungskonstante
c = 2 cm
1200 cmkg (durch 600 kg-Last)
Längenmaßstab
0 5 10 m.

Abb. 7. Lösung eines Raumfachwerks nach dem ersten und zweiten Bildungsgesetz mit der Methode der dualen Abbildung (Beispiel V).

Tabelle 10. *Abbildungswerte zum Fachwerk. Beispiel V.*

Stab bzw. Kraft	Kraftdarstellung: Komponenten (Längen, Kräfte) x_i	y_i	z_i	Kraftdarstellung: Abbildungswerte l'_i	a_i	Momentendarstellung: Lage eines Punktes der Kraftwirkungslinie: Bezugspunkt	ξ	η	ζ	Abbildungswerte für den Momentenvektor $\xi y - \eta x$	b_x	b_y
1	0	− 4	−5	4	−2,5							
2	+3,75	+ 2	−5	4,25	−2,352							
3	−3,75	+ 2	−5	4,25	−2,352							
4↘	+3,75	− 6	0	7,076	0							
5↗	+3,75	+ 6	0	7,076	0							
6←	−7,5	0	0	7,5	0							
7	+9,75	+ 1,5	−8	9,86	−1,624	*I*	−7,5	0	0	−11,25	−10,667	0
8	−2,25	+ 1,5	−8	2,70	−5,926	*I*	−7,5	0	0	−11,25	−10,667	0
9	−6	+ 7,5	−8	9,605	−1,664	*I*	−3,75	−6	0	−64,125	− 0,936	−1,497
10	0	− 3,5	−8	3,5	−4,572	*I*	−3,75	−6	0	+13,125	+ 4,571	−7,314
11	−3,75	− 9,5	−8	10,21	−1,567	*I*	0	0	0	0	—	—
12	+2,25	+ 1,5	−8	2,70	−5,926	*I*	0	0	0	0	—	—
13←	−12	0	0	12	0							
14↘	+6	−11	0	12,53	0							
15↗	+6	+11	0	12,53	0							
16	−6	−15	−6	16,16	−0,743	*II*	0	0	0	0	—	—
17	+3	+ 2,5	−6	3,91	−3,070	*II*	0	0	0	0	—	—
18	+15	+ 2,5	−6	15,20	−0,790	*II*	−12	0	0	−30	− 4,8	0
19	−3	+ 2,5	−6	3,91	−3,070	*II*	−12	0	0	−30	− 4,8	0
20	−9	+13,5	−6	16,24	−0,740	*II*	−6	−11	0	−180	− 0,4	−0,733
21	0	− 4	−6	4	−3	*II*	−6	−11	0	+24	+ 3	+5,5
P↘	+300	−700	−500	761,6	−1,313	*I*	−3,75	−2	+ 5	+3225	+0,233	+2,791
						II	−6	−3,5	+13	+5250	−0,343	+4,133
500←	−500	0	0	500	0	*I*	0	0	0	0	—	—
						II	−2,25	−1,5	+ 8	−750	−10,667	0
400→	+400	0	0	400	0	*I*	−3,75	−6	0	+2400	0	0
						II	−6	−7,5	+ 8	+3000	−2,133	0
600↓	0	0	−600	(0)	(∞)	*I*	$M_y = -4500$			$(M_z \cdot b_x) = +9000$		
				$(P' \cdot a) = -600 \cdot 2$		*II*	$M_y = -5850$; $M_x = +900$			$(M_z \cdot b_x) = +11700$; $(M_z \cdot b_y) = +1800$		

Damit stehen als erstes Gleichgewichtsproblem die Momentenvektoren $M^I_{7,8}$, M^I_9, M^I_{10} mit den bekannten Momentenvektoren $M^I_P = 3225$ mkg, $M^I_{400} = 2400$ mkg und dem Vektormoment $(Mb)^I_{600}$ von der Größe 9000 [cm mkg] im Gleichgewicht. Wir ermitteln die Vektoren mit Momentengleichungen um drei Achsen a, b, c durch je zwei Fußpunkte:

$$\Sigma M_a = 0: \quad 3225 \cdot 2{,}20 + 2400 \cdot 4{,}61 - 3900 + M^I_9 \cdot 5{,}54 = 0,$$

$$\Sigma M_b = 0: \quad 3225 \cdot 4{,}40 + 2400 \cdot 1{,}60 - 1365 + M^I_{10} \cdot 9{,}55 = 0,$$

$$\Sigma M_c = 0: \quad 3225 \cdot 1{,}27 \qquad\qquad + 7620 + M^I_{7,8} \cdot 9{,}00 = 0.$$

(Vom Vektormoment $(M \cdot b_x)^I_{600}$ ist dabei nur die Komponente zu setzen, die in der Achsenrichtung zeigt, die Hebelarme für die anderen Momentenvektoren sind aus der Zeichnung entnommen.)

Wir erhalten daraus

$$M^I_9 = -2574 \text{ mkg}, \quad M^I_{10} = -1745 \text{ mkg}, \quad M^I_{7,8} = -1302 \text{ mkg}.$$

Der Momentenvektor $M^I_{7,8}$ liefert die Summe der Lagenmomente beider Stäbe. Zur Aufspaltung dieser Summe in die Einzelwerte denken wir uns die resultierende Kraft dieser beiden Stäbe zerlegt in eine Komponente ${}_vS'_{7,8}$ in der y-Richtung und eine zweite ${}_hS'_{7,8}$ in der x-Richtung. Die letztere geht durch den Punkt *I* im Grundriß des Raumsystems, hat also kein Moment um diesen Punkt. Damit erkennen wir, daß der erhaltene Momentenvektor $M^I_{7,8}$ das Lagenmoment für ${}_vS'_{7,8}$ darstellt und wir können die drei zugehörigen Bildstabgrößen errechnen zu

$$ {}_vS'_{7,8} = -1302 \cdot \frac{1{,}5}{-11{,}25} = +174 \text{ kg}, $$

$$ S'_9 = -2574 \cdot \frac{9{,}605}{-64{,}125} = +386 \text{ kg}, $$

$$ S'_{10} = -1745 \cdot \frac{3{,}5}{+13{,}125} = -465 \text{ kg}. $$

Die restlichen drei Stabkräfte, das sind ${}_hS'_{7,8}$, S'_{11}, S'_{12}, lassen sich nun mit Hilfe eines Kraft- und Seilecks in dem dualen Bild finden: Wir fassen zunächst die gegebenen Kräfte P', 500, 400, S'_9, S'_{10} und ${}_vS'_{7,8}$ zu einer Resultierenden R' zusammen, deren Größe sich aus dem Krafteck zu 243 kg ergibt, geben zu dieser das Moment 1200 cmkg hinzu, was eine Verlagerung der Resultierenden im Sinne des Moments um $x' = 1200/243 = 4{,}94$ cm bedeutet, und setzen die so entstandene Resultierende R' mit ${}_hS'_{7,8}$, S'_{12} und S'_{11} nach dem Culmannschen Verfahren ins Gleichgewicht. Aus ${}_vS'_{7,8}$ und ${}_hS'_{7,8}$ wird durch ein Ersatzkrafteck wieder S'_7 und S'_8, so daß aus dem gezeichneten Krafteck die sechs Stabkräfte zu entnehmen sind. Wir lesen ab

$$ S'_7 = +541 \text{ kg}, \quad S'_9 = +386 \text{ kg}, \quad S'_{11} = -7 \text{ kg}, $$

$$ S'_8 = +163 \text{ kg}, \quad S'_{10} = -465 \text{ kg}, \quad S'_{12} = -439 \text{ kg}. $$

Die zweite Teilaufgabe, der Schnitt durch die Stäbe 16, 17, 18, 19, 20, 21 wird in der gleichen Weise mit dem Bezugspunkt *II* des Raumsystems dargestellt. Für die Kraft 600 ergibt sich bei der Darstellung der Bildmomentenvektoren ein Vektormoment um die x-Achse

$$ (M\, b_y)^{II}_{600} = +c\, M^*_x = +2 \cdot 900 = +1800 \text{ [cm mkg]}; $$

und ein Moment um die y-Achse

$$ (M\, b_x)^{II}_{600} = -2 \cdot (-5850) = +11\,700 \text{ (cm mkg]}. $$

Wir können wieder um drei Achsen, d, e und f, die Momentengleichungen für die vorhandenen Momentenvektoren, deren Fußpunkte jetzt mit M''_i in die Zeichnung eingetragen sind, aufstellen:

$$ \Sigma M_d = 0: \quad 750 \cdot 3{,}40 - 5250 \cdot 0{,}82 + 3000 \cdot 1{,}52 - 8200 + M^{II}_{20} \cdot 3{,}13 = 0, $$

$$ \Sigma M_e = 0: \quad -750 \cdot 0{,}97 - 5250 \cdot 4{,}81 - 3000 \cdot 0{,}43 + 150 - M^{II}_{21} \cdot 6{,}72 = 0, $$

$$ \Sigma M_f = 0: \quad -750 \cdot 9{,}36 + 5250 \cdot 2{,}29 + 3000 \cdot 1{,}87 + 11150 + M^{II}_{18,19} \cdot 4{,}20 = 0. $$

Daraus ergibt sich

$$ M^{II}_{18,19} = -5182 \text{ mkg}, \quad M^{II}_{20} = +1724 \text{ mkg}, \quad M^{II}_{21} = -4036 \text{ mkg}. $$

Die Zuordnungsgleichungen zwischen Lagenmoment und Bildkraftvektor liefern, bei der gleichen Zerlegung der Resultierenden der Stabkräfte S'_{18} und S'_{19} in eine drehende Komponente ${}_rS'_{18,19}$ und eine Komponente ${}_hS'_{18,19}$ durch den Bezugspunkt *II*, für

$$ {}_rS'_{18,19} = -5182 \cdot \frac{2{,}5}{-30} = +432 \text{ kg}, $$

$$ S'_{20} = +1724 \cdot \frac{16{,}24}{-180} = -156 \text{ kg}, $$

$$ S'_{21} = -4036 \cdot \frac{4}{+24} = -673 \text{ kg}. $$

Die restlichen drei Kräfte dieses Teilproblems sind wieder wie beim vorhergehenden System mit Kraft- und Seileck (wobei wieder das reine Moment 1200 cmkg der Last 600 kg nicht vergessen werden darf) zu ermitteln, und wir entnehmen der Abb. 7 für die Stabkräfte des zweiten Schnittproblems

$$ S'_{16} = -172 \text{ kg}, \quad S'_{18} = +578 \text{ kg}, \quad S'_{20} = -156 \text{ kg}, $$

$$ S'_{17} = -673 \text{ kg}, \quad S'_{19} = +526 \text{ kg}, \quad S'_{21} = -673 \text{ kg}. $$

Der Rest der Raumaufgabe kann ohne Momentenvektoren gelöst werden. Die Spitze des Raumfachwerks liefert eine Gleichgewichtsaufgabe zwischen der Kraft P' und den Stabkräften S'_1, S'_2, S'_3, die mit dem Culmannschen Verfahren gelöst wird. Wir finden aus dem Krafteck

$$ S'_1 = -609 \text{ kg}, \quad S'_2 = -63 \text{ kg}, \quad S'_3 = +277 \text{ kg}. $$

Der nächste Knoten enthält nur noch zwei Unbekannte im Gleichgewichtsproblem, so daß hier bereits auf das Seileck bzw. die Lösung nach Culmann verzichtet werden kann und ein einfaches Krafteck genügt. Die dann folgenden beiden Knoten enthalten nur eine Unbekannte, wodurch schon das Krafteck selbst zur Kontrolle wird.

Wir lesen nach Durchführung der Lösungen für diese Knoten, die sich in die bereits bestehenden Krafteckbilder gut einfügen lassen, die Stabgrößen ab

$$S'_4 = +55 \text{ kg}, \qquad S'_5 = -250 \text{ kg}, \qquad S'_6 = -672 \text{ kg}$$

und im unteren Ring

$$S'_{13} = -560 \text{ kg}, \qquad S'_{14} = +42 \text{ kg}, \quad S'_{15} = -126 \text{ kg}.$$

Der Übergang zur wirklichen Stabkraft ist wieder mit dem Verhältnis $S^*/S' = l/l'$ durchzuführen. Die Werte für die einzelnen Stäbe sind, einschließlich ihrer Vorzeichen, in der Tabelle 11 aufgeführt.

Tabelle 11. *Die wirklichen Stabkräfte des Raumfachwerks.*

Stab	1	2	3	4	5	6	7
S' = [kg]	−609	−63	+277	+55	−250	−672	+541
l = [m]	6,40	6,56	6,56	7,08	7,08	7,50	12,70
l' = [m]	4,00	4,25	4,25	7,08	7,08	7,50	9,86
S^* = [kg]	−975	−97	+428	+55	−250	−672	+697
Stab	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**
S' = [kg]	+163	+386	−465	−7	−439	−560	+42
l = [m]	8,45	12,50	8,73	12,97	8,45	12,00	12,53
l' = [m]	2,70	9,61	3,50	10,21	2,70	12,00	12,53
S^* = [kg]	+510	+502	−1160	−9	−1373	−560	+42
Stab	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**
S' = [kg]	−126	−172	−673	+578	+526	−156	−673
l = [m]	12,53	17,23	7,16	16,35	7,16	17,30	7,21
l' = [m]	12,53	16,16	3,91	15,20	3,91	16,24	4,00
S^* = [kg]	−126	−183	−1232	+622	+963	−166	−1213

Wenn wir nun die Lösung unseres Raumfachwerks überblicken, sehen wir, daß wir auch mit der Momentendarstellung um Punkt *II* allein ausgekommen wären, denn dieser Punkt erfüllt alle an ihn gestellten Anforderungen, sowohl für das erste Teilproblem wie auch für das zweite Schnittproblem. Damit hätten wir die Darstellungen der Momentenvektoren der gegebenen Kräfte in bezug auf Punkt *I* sparen können. Es wurde hier aber, wie schon erwähnt, diese spezielle Eigenschaft des Punktes *II* nicht benutzt, weil doch im allgemeinen bei Raumfachwerken derartige Punktlagen seltener vorkommen und der beschriebene Weg mit zwei Abbildungspunkten, für jedes Schnittproblem je einer, allgemein verwertbar ist.

9. Die Möglichkeit anderer Abbildungsmethoden. Die Lösungsgänge bei allen Aufgaben zeigen stets eine vollständige Trennung zwischen den Gleichgewichtsproblemen der Momentenvektoren und denen der Bildstabkräfte. Es ist also durchaus möglich, die Lösungen der Momentenvektoren, die nicht in das Bildstabsystem übergreifen, herauszuziehen, und sie in einem zweiten, gesonderten Bild zu betrachten. Die Ergebnisse dieser abgetrennten Lösung werden nach Umrechnung mit den Zugehörigkeitsgleichungen als zugeordnete Bildstabkräfte in die Abbildung der Kräfte übertragen. Sie liefern dort als bekannte Kräfte mit den gegebenen und den noch unbekannten Stabkräften das Restproblem von zerstreuten Kräften in der Ebene.

Mit dieser Trennungsmöglichkeit der Lösungsbilder für Momentenvektoren und Kraftvektoren ergibt sich weiter, daß für die selbständig zu behandelnden Lagenmomente auch ein anderes Abbildungsgesetz verwendet werden kann. So wäre es durchaus statthaft, auch den dualen Bildern der Lagenmomente die gleichen Abbildungsgesetze zugrunde zu legen, die wir für die Kräfte aufgestellt haben, d. h. die Lagenmomente erscheinen dann in der dualen Abbildung auch als zerstreute Vektoren in einer Ebene und sind dort mit Krafteck und Seileck

ins Gleichgewicht zu setzen. Andererseits ist es aber auch möglich, die Darstellung der Kräfte in der Form zu wählen, in der bisher die Lagenmomente abgebildet wurden, d. h. sie können auch als lotrechte Vektoren auf der Abbildungsebene erscheinen, wie es schon von *W. Prager*[1] vorgeschlagen war. Jede Abbildungsart hat ihre Eigenheiten, und es ist durchaus möglich, daß in besonderen Fällen eine andere Abbildungsgrundlage bequemer zum Ziel führt als die hier allgemein angegebenen Abbildungsgesetze. Vor gleichartigen Abbildungen für Kräfte und Momente brauchen wir auch nicht zurückzuschrecken, da, wie wir oben gesehen haben, beide Gleichgewichtslösungen vollständig getrennt zu behandeln sind und zur Vermeidung von Verwechslungen die beiden verschieden charakterisierten Vektordarstellungen in getrennten Bildern aufgetragen werden können.

Die Lagerung mit Stäben im Raum kann natürlich auch durch andersgeartete Lagermöglichkeiten ersetzt werden. Das Einspannmoment im Raum läßt sich in der dualen Abbildung als einzelner Momentenvektor darstellen; jede Kraftkomponente ist wie ein Stab abzubilden, und wir erhalten bei statisch bestimmter Lagerung und der Wahl des Raumbezugspunktes auf einer Unbekannten, nie mehr als fünf unbekannte Momentenvektoren, die im ungünstigsten Fall nach Art des Beispiels IV (Abb. 6) zu ermitteln sind. Meist werden jedoch bei gelagerten Raumwerken nicht alle Kräfte windschief zueinander liegen, so daß wohl immer die einfachere Lösung, die am Beispiel III (Abb. 5) gezeigt wurde, durchzuführen ist.

10. Zusammenfassung. Mit der Methode der dualen Abbildung lassen sich Gleichgewichtsaufgaben mit sechs unbekannten Kräften im Raum auf ebene Probleme zurückführen und werden mit ebenen Gleichgewichtsbedingungen lösbar. Für eine allgemeine statisch bestimmte räumliche Lagerung ist durch geeignete Wahl der räumlichen Bezugspunkte die Gleichgewichtsaufgabe in zwei Einzelprobleme zu trennen, die der Reihe nach unabhängig voneinander gelöst werden. Liegen mindestens zwei der räumlich allgemein angeordneten Kräfte in einer Ebene, so läßt sich die Aufgabe rein graphisch in ebenen Teilproblemen durchführen.

Damit sind sowohl allgemeine räumliche Anschlüsse als auch Raumfachwerke nach dem ersten oder zweiten Bildungsgesetz allgemeiner Art zu behandeln. In Sonderfällen, unter denen besonders der praktisch bedeutsame Fall zu erwähnen ist, bei dem drei Fesseln durch einen Punkt gehen, entstehen Erleichterungen in der Abbildung und in den ebenen Lösungsgängen.

Die Abbildungen der Kräfte und Momente weisen zahlreiche Kontrollmöglichkeiten auf, die sich auch bis auf die Lösungsergebnisse erstrecken, so daß die Ermittlungen mit großer Sicherheit bequem durchzuführen sind. Das Verfahren ergibt übersichtliche und, im Verhältnis zu sonstigen Lösungsgängen im Raum, leicht zu bewältigende Einzelprobleme.

(Eingegangen am 18. März 1944.)

[1] *W. Prager*, Z. angew. Math. Mech. 16 (1926) S. 341.

Beitrag zur Berechnung der hyperbolischen Paraboloidschale.

Von K. G. Tester in München.

1. Einleitung. Das im folgenden behandelte hyperbolische Paraboloid gehört zu den windschiefen, also nicht abwickelbaren Flächen. Eisenbetonschalen solcher Form, für die Überdachung weitgespannter Hallen großer Binderentfernung angewendet, besitzen die Vorteile anderer Eisenbetonschalen: Leichtigkeit, Feuersicherheit, geringe Empfindlichkeit gegen Sprengwirkung infolge räumlicher Tragwirkung, geringen Stahlbedarf und mäßigen Transportaufwand. Windschiefe Schalen im besonderen überragen die üblichen Formen durch ihre Eignung: Sie sind knicksicherer, also stahlsparender, als die abwickelbaren Zylinderflächen und wiederum einfacher einzuschalen als die ebenfalls doppelt gekrümmten Kuppeln, da sie infolge der in jedem Punkte vorhandenen zwei Oberflächengeraden ohne Lehrbögen, d. h. nur aus geraden Brettern und Unterlagshölzern hergestellt werden können.

Bereits vor fast zehn Jahren von *Aimond*[1] in das Gebiet der Baukonstruktionen eingeführt, konnte die hyperbolische Paraboloidschale, wahrscheinlich infolge Fehlens einer einheitlichen Berechnungsweise, bei uns keine Verbreitung finden. Sie soll daher, unter Anknüpfung an eine Spannungsfunktion, für eine Reihe bisher nichtbehandelter Belastungen (Wind, hydrostatischen Druck, waagerechte Flächenlast usw.) nach der Membrantheorie berechnet werden.

Das Element ist von Randträgern begrenzt gedacht. Eine Überdachung besteht aus mindestens vier Elementen der Abb. 1 mit dem Scheitel in *C*.

Der Klarheit halber möge ein quadratischer Grundriß vorgegeben sein; für das Rechteck folgen daraus die Ergebnisse durch leichte Umformung.

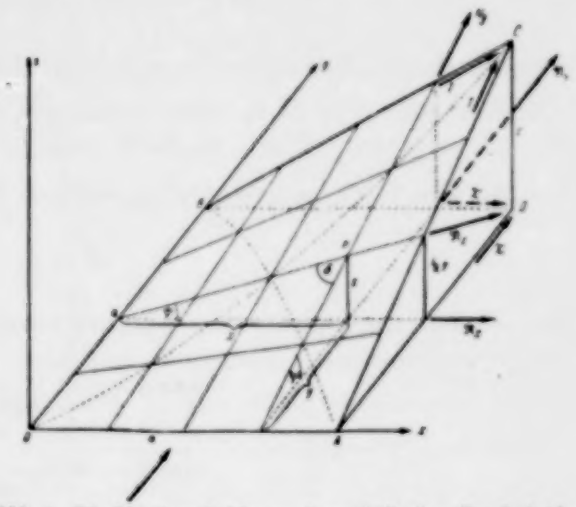

Abb. 1. Die Membrankräfte am hyperbolischen Paraboloid.

2. Die Membrankräfte. Aus Abb. 1 ergibt sich durch geometrische Beziehung die Flächengleichung

$$z = f(x, y) = \frac{c}{a^2}\, x\, y = \frac{1}{n}\, x\, y. \tag{1}$$

Die partiellen Ableitungen sind

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{n}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{n}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \frac{1}{n}. \tag{2}$$

Werden die Grundrißprojektionen der Membrankräfte N_x, N_y, T mit $\mathfrak{N}_x$, $\mathfrak{N}_y$, $\mathfrak{T}$ bezeichnet und die Teilkräfte der äußeren Lasten nach den Achsen mit X, Y, Z, wobei alle Größen auf die Flächeneinheit des Grundrisses bezogen sind, so wird das Gleichgewicht eines Flächenteilchens nach *Pucher*[2] durch drei Gleichungen beschrieben:

$$\frac{\partial \mathfrak{N}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial y} + X = 0, \tag{I}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{N}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial x} + Y = 0, \tag{II}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\mathfrak{N}_x \frac{\partial z}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mathfrak{N}_y \frac{\partial z}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mathfrak{T} \frac{\partial z}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\mathfrak{T} \frac{\partial z}{\partial y}\right) + Z = 0. \tag{III}$$

Den Bedingungen (I) und (II) wird durch Einführung einer Spannungsfunktion entsprochen, wenn festgesetzt wird, daß

$$\mathfrak{N}_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \int_{x_0}^{x} X\, dx, \quad \mathfrak{N}_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \int_{y_0}^{y} Y\, dy, \quad \mathfrak{T} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \cdot \partial y}. \tag{IV}$$

---

[1] *F. Aimond*, Etude statique des voiles minces en paraboloide hyperbolique travaillant sans flexion. Abh. d. int. Kongr. f. Br. u. H. 1936, Band IV; ferner Genie civ. 102 (1933) S. 179.

[2] *A. Pucher*, Bauing. 18 (1937) S. 118; Beton u. Eisen XXXIII (1934) S. 298; Z. VDI 87 (1943) S. 251. — *K. Hruban*, Technicky Obzor L (1942) S. 186; XLIX (1941) S. 129.

Durch Einsetzen von (IV) in (III) erhalten wir

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-2\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=-Z+\Big(X\frac{\partial z}{\partial x}+Y\frac{\partial z}{\partial y}\Big)+\Big(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\int_{x_0}^{x}X\,dx+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\int_{y_0}^{y}Y\,dy\Big), \quad \text{(V)}$$

und durch Einsetzen von (2) ergibt sich schließlich unsere Ausgangsformel

$$-\frac{2}{n}\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}=-Z+\Big(X\frac{y}{n}+Y\frac{x}{n}\Big)$$

oder

$$\mathfrak{T}=-\frac{n}{2}Z+\frac{1}{2}\big(Xy+Yx\big). \tag{3}$$

3. Windbelastung. Wird der Wind parallel zur y-Achse angenommen (Abb. 1), so sind seine Richtungskosinus $\cos\alpha_1=0$, $\cos\beta_1=1$, $\cos\gamma_1=0$. Um den Winkel zwischen dem Winde und der Fläche (1) in jedem ihrer Punkte ausdrücken zu können, müssen wir die Gleichung ihrer Tangentialebene im allgemeinen Punkte $P\,(x, y, z)$ feststellen, sowie die Richtungskosinus der Flächennormalen dort. Die Tangentialebene mit den laufenden Koordinaten ξ, η, ζ einer krummen Fläche wird allgemein dargestellt durch

$$(\zeta-z)=(\xi-x)\frac{\partial z}{\partial x}+(\eta-y)\frac{\partial z}{\partial y},$$

woraus durch Einsetzen von (2) als Gleichung der gesuchten Tangentialebene hervorgeht

$$\frac{y}{n}\xi+\frac{x}{n}\eta-\zeta-\frac{xy}{n}=0.$$

Durch Vergleich mit der allgemeinen Ebenengleichung $A\xi+B\eta+C\zeta+D=0$ ergibt sich

$$A=\frac{y}{n}, \qquad B=\frac{x}{n}, \qquad C=-1.$$

Die Richtungskosinus der Flächennormalen in P sind nun

$$\cos\alpha=-\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+n^2}},$$

$$\cos\beta=-\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+n^2}},$$

$$\cos\gamma=-\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=+\frac{n}{\sqrt{x^2+y^2+n^2}}.$$

Für den Winkel zwischen einer Geraden $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ und einer Ebene gilt allgemein

$$\sin\omega=\frac{A\cos\alpha_1+B\cos\beta_1+C\cos\gamma_1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

also für den Winkel zwischen der Windrichtung und der Tangentialebene:

$$\sin\omega=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+n^2}}.$$

Die zur Fläche (1) senkrechte Teilkraft des Windes v_0 ist also im allgemeinen Punkte P, auf die schiefe Flächeneinheit bezogen

$$v=-v_0\sin^2\omega=-v_0\frac{x^2}{x^2+y^2+n^2}.$$

Die Grundrißprojektion der schiefen Flächeneinheit ist $1\cdot\cos\gamma$. Auf die Grundrißeinheit entfällt folglich die Belastung $v:\cos\gamma$. Diese Belastung zerlegen wir nach den Achsenrichtungen durch Vervielfachen mit den entsprechenden Richtungskosinus der Fläche und erhalten die in (3) verlangten Teillasten zu

$$v_x=-v_0\frac{x^2}{x^2+y^2+n^2}\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}=+v_0\frac{x^2y}{n\,(x^2+y^2+n^2)}=X,$$

$$v_y=-v_0\frac{x^2}{x^2+y^2+n^2}\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}=+v_0\frac{x^3}{n\,(x^2+y^2+n^2)}=Y,$$

$$v_z=-v_0\frac{x^2}{x^2+y^2+n^2}\frac{\cos\gamma}{\cos\gamma}=-v_0\frac{x^2}{(x^2+y^2+n^2)}=Z.$$

Nach (3) ist nun

$$\mathfrak{T} = + \frac{v_0 x^2}{2 n},$$

so daß nach (I) kommt

$$\mathfrak{N}_x = - \int \left(\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial y} + X \right) dx + C_1$$

oder

$$\mathfrak{N}_x = - \frac{v_0}{n} y \left(x - \sqrt{y^2 + n^2} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{\sqrt{y^2 + n^2}} \right) + C_1.$$

Wird festgestellt, daß die Randträger OA und OB tangential zur Fläche keinen Widerstand leisten können, so daß also $\mathfrak{N}_x$ für $x = 0$ und $\mathfrak{N}_y$ für $y = 0$ verschwindet und die Längskräfte auf die Ränder AC und BC überführt werden, wo Mittelrippen vorhanden sind, so wird $C_1 = 0$. Weiter ist nach (II)

$$\mathfrak{N}_y = - \int \left(\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial x} + Y \right) dy + C$$

oder

$$\mathfrak{N}_y = - \frac{v_0 x}{n} \left(y + \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + n^2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{\sqrt{x^2 + n^2}} \right) + C_2 \text{ mit } C_2 = 0.$$

Hiermit sind die Membrankräfte bestimmt.

4. Hydrostatische Belastung. Bei einer Höhe h der Wasseroberfläche ($h \geqq c$) nach Abb. 2 wirkt in jedem Punkte senkrecht zur Fläche auf ihre schiefe Einheit der Druck:

$$\omega = - \gamma (h - z) = - \gamma \left(h - \frac{x y}{n} \right).$$

Die Teilkräfte nach den Achsen auf die Grundrißeinheit erhalten wir wie vorher durch Vervielfachen mit den zugehörigen Richtungskosinus und Teilen durch $\cos \gamma$.

$$\omega_x = + \gamma \left(h - \frac{x y}{n} \right) \frac{y}{n} = X,$$

$$\omega_y = + \gamma \left(h - \frac{x y}{n} \right) \frac{x}{n} = Y,$$

$$\omega_z = - \gamma \left(h - \frac{x y}{n} \right) \quad = Z.$$

Weiter kommt nach (3), (I) und (II)

$$\mathfrak{T} = + \frac{\gamma}{2 n} \left(h - \frac{x y}{n} \right) (x^2 + y^2 + n^2),$$

$$\mathfrak{N}_x = + \frac{\gamma}{2 n^2} \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^4}{2} (5 y^2 + n^2) - 4 n h x y \right],$$

$$\mathfrak{N}_y = + \frac{\gamma}{2 n^2} \left[\frac{y^4}{4} + \frac{y^2}{2} (5 x^2 + n^2) - 4 n h x y \right].$$

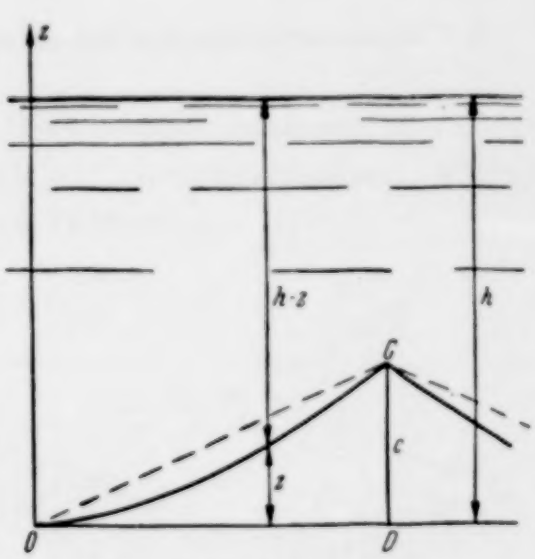

Abb. 2. Hydrostatische Belastung.

5. Waagerechte Flächenlast in Richtung y. Auf die Einheit der schiefen Fläche entfällt $h = h_0 \sin \omega$, auf die Grundrißeinheit also

$$h_y = h_0 \frac{\sin \omega}{\cos \gamma} = h_0 \frac{x}{n} = Y, \qquad X = Z = 0.$$

Damit kommt

$$\mathfrak{T} = + \frac{h_0}{2 n} x^2,$$

$$\mathfrak{N}_x = 0, \qquad \mathfrak{N}_y = - \frac{2 h_0}{n} x y.$$

6. Gleichförmige Belastung des Grundrisses. Nur der Vollständigkeit halber sei angeführt, daß sich aus (3) sofort die bekannten Ausdrücke ergeben

$$\mathfrak{T} = + \frac{q n}{2} = + \frac{q}{2} \frac{a^2}{c}, \quad \mathfrak{N}_x = \mathfrak{N}_y = 0.$$

7. Keilförmige Belastung nach x (Abb. 3). Hier wird

$$Z = -\frac{p}{a}x, \qquad X = Y = 0$$

und also

$$\mathfrak{T} = +\frac{n}{2}\frac{p}{a}x,$$

$$\mathfrak{N}_x = 0, \qquad \mathfrak{N}_y = -\frac{np}{2a}y.$$

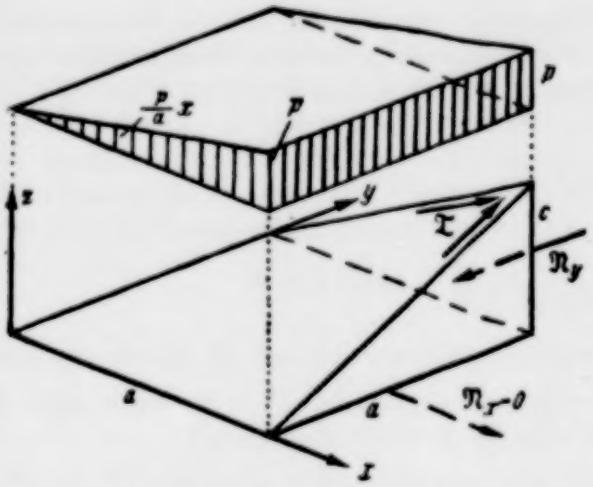

Abb. 3. Keilförmige Belastung nach x.

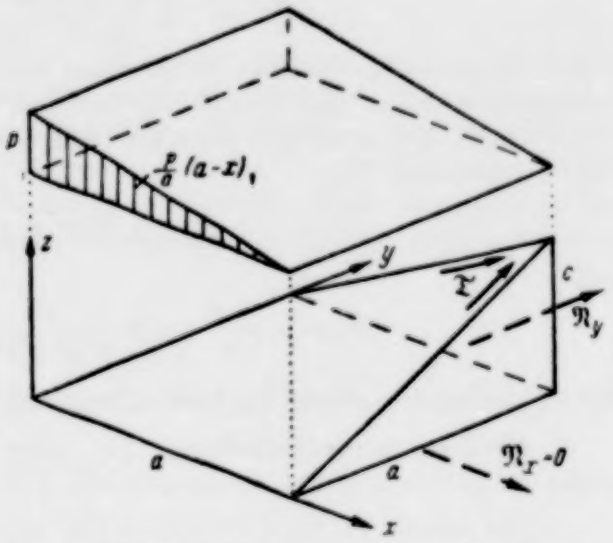

Abb. 4. Umgekehrt keilförmige Belastung nach x.

8. Umgekehrt keilförmige Belastung nach x (Abb. 4). Mit

$$Z = -\frac{p}{a}(a - x), \qquad X = Y = 0$$

kommt

$$\mathfrak{T} = +\frac{np}{2a}(a - x),$$

$$\mathfrak{N}_x = 0, \quad \mathfrak{N}_y = +\frac{np}{2a}y.$$

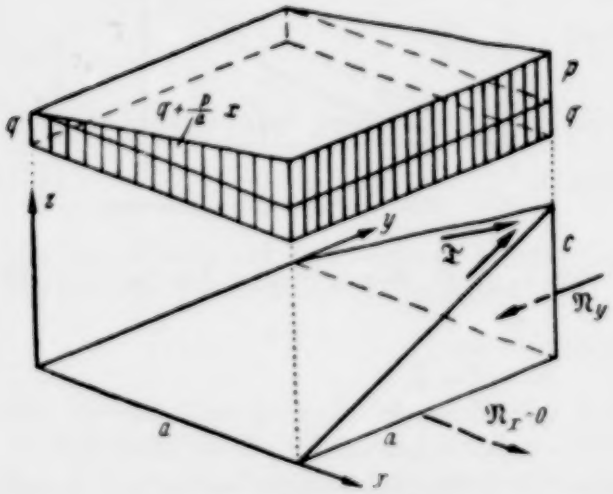

Abb. 5. Trapezlast nach x.

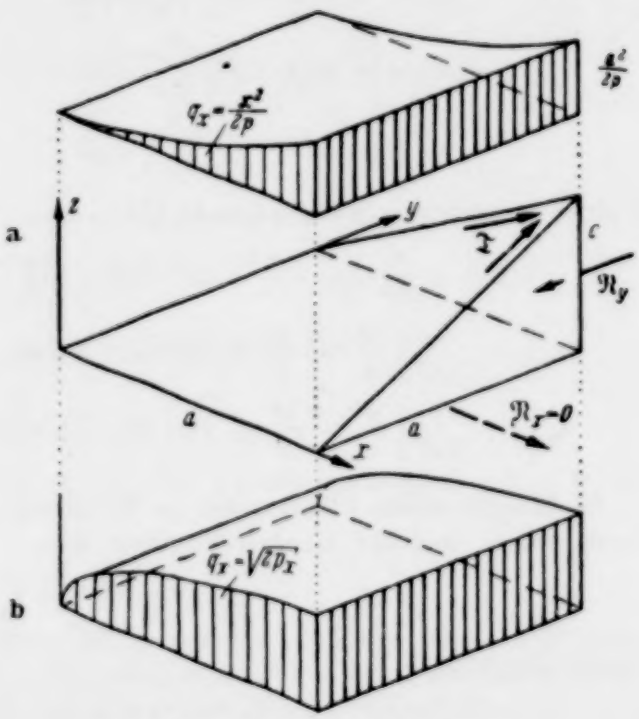

Abb. 6 a, b. Parabolische Belastung nach x.

9. Trapezlast nach x (Abb. 5). Mit

$$Z = -\left(q + \frac{p}{a}x\right), \qquad X = Y = 0$$

kommt

$$\mathfrak{T} = +\frac{n}{2}\left(q + \frac{p}{a}x\right), \quad \mathfrak{N}_x = 0, \quad \mathfrak{N}_y = -\frac{np}{2a}y.$$

10. Parabolische Belastung nach x (Abb. 6a). Mit

$$Z = -q(x) = -\frac{x^2}{2p}, \qquad X = Y = 0$$

kommt

$$\mathfrak{T} = +\frac{n}{4p}x^2, \qquad \mathfrak{N}_x = 0, \qquad \mathfrak{N}_y = -\frac{nxy}{2p}.$$

Bemerkenswert ist, daß eine Belastung $q(x) = \sqrt{2px}$ nach Abb. 6b keinen Membranzustand ermöglicht, da $\mathfrak{N}_y = -\frac{n}{4}y\sqrt{\frac{2p}{x}}$ für jedes y und $x = 0$ zu $-\infty$ wird, was mit der dort senkrechten Belastungstangente zusammenhängt.

11. Windschiefe Belastung, Scheitel in $x = y = a$ (Abb. 7). Mit

$$Z = -q(x,y) = -\frac{q}{a^2}xy, \qquad X = Y = 0$$

kommt

$$\mathfrak{T} = +\frac{nq}{2a^2}xy = +\frac{q}{2c}xy,$$

$$\mathfrak{N}_x = -\frac{q}{4c}x^2, \qquad \mathfrak{N}_y = -\frac{q}{4c}y^2.$$

Diese Belastung entsteht bei der Überwölbung von Kellern mittels Paraboloiden durch die verschieden hohe Anschüttung, weiter bei Pilzköpfen aus Paraboloiden.

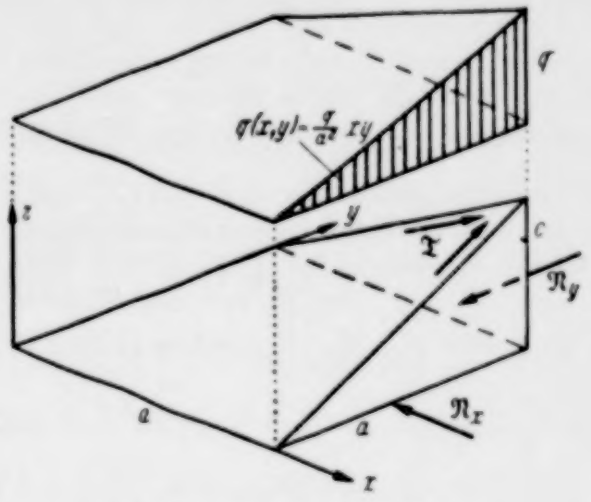

Abb. 7. Windschiefe Belastung.

12. Gleichförmige Belastung der Oberfläche. Der Grundflächeneinheit entspricht eine Oberfläche von $\frac{1}{\cos\gamma} = \frac{1}{n}\sqrt{x^2+y^2+n^2}$. Die Belastung der Fläche je Grundflächeneinheit $g(x, y)$ ist also, wenn g_0 die Belastung (das Gewicht) der schiefen Flächeneinheit ist

$$g(x,y) = \frac{g_0}{n}\sqrt{x^2+y^2+n^2} = -Z.$$

Daher kommt nach (3)

$$\mathfrak{T} = \frac{g_0}{2}\sqrt{x^2+y^2+n^2},$$

$$\mathfrak{N}_x = -\frac{g_0}{2}y\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2+n^2}\right),$$

$$\mathfrak{N}_y = -\frac{g_0}{2}x\ln\left(y+\sqrt{x^2+y^2+n^2}\right).$$

13. Erhöhte Giebelwände. Bei der Ausführung wird manchmal die Giebelmitte (Abb. 8) um die Strecke b höher gelegt. Dann ist

$$d = \frac{c-b}{a}y + b, \qquad e = \frac{b}{a}y,$$

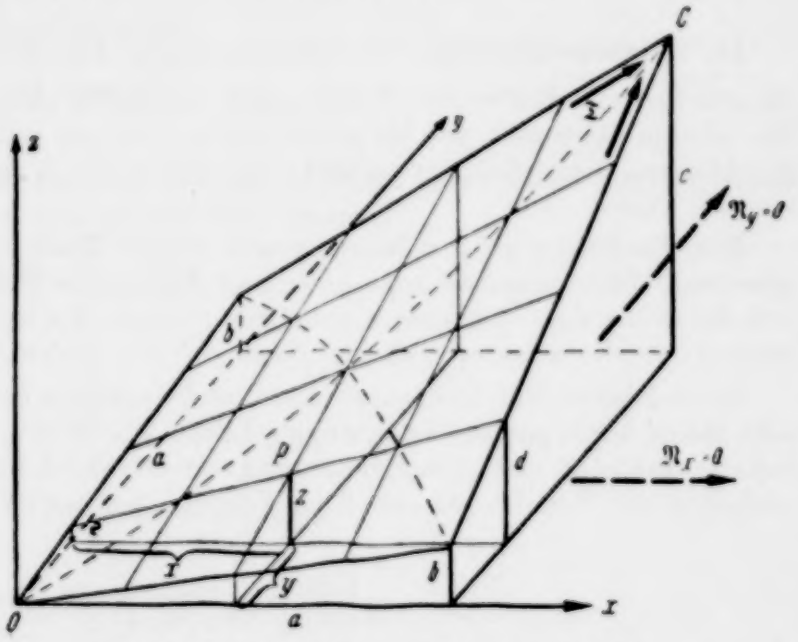

Abb. 8. Hyperbolisches Paraboloid mit erhöhten Giebeln.

und daher

$$z = \frac{c-2b}{a^2}xy + \frac{b}{a}(x+y) = \frac{xy}{n_1} + \frac{x+y}{n_2} \quad \text{mit} \quad n_1 = \frac{a^2}{c-2b}, \quad n_2 = \frac{a}{b},$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{n_1} + \frac{1}{n_2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{n_1} + \frac{1}{n_2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{1}{n_1}.$$

Für gleichförmige Belastung des Grundrisses wird

$$\mathfrak{T} = + \frac{n_1}{2} q = + \frac{a^2}{2(c-2b)} q. \qquad \mathfrak{N}_x = \mathfrak{N}_y = 0.$$

Der Einfluß der übrigen Belastungen kann nach obigem leicht festgestellt werden. Bei der Formgebung ist jedoch zu beachten, daß b nicht gleich $c/2$ werden darf, weil hierbei die windschiefe Fläche in eine Ebene übergehen würde und die Membrankräfte unendlich groß werden müßten. Ober- und unterhalb dieses Wertes besitzen die Membrankräfte verschiedenes Vorzeichen, Stütz- und Hängeparabel tauschen ihre Lage.

14. Hauptkräfte. Sind $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{N}_x$ und $\mathfrak{N}_y$ berechnet, von denen die beiden letzteren wie angegeben die aufeinander senkrecht stehenden Grundrißprojektionen der Membrankräfte je Grundrißeinheit sind, so ergeben sich die zugehörigen Kräfte in der schiefen Fläche zu

$$N_x = \mathfrak{N}_x \frac{\cos\varphi}{\cos\varphi}, \qquad N_y = \mathfrak{N}_y \frac{\cos\varphi}{\cos\psi}, \qquad T = \mathfrak{T}.$$

Sie schließen miteinander den Winkel δ ein, für welchen gilt

$$\cos\delta = \frac{\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}}{\sqrt{\left[1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right]\left[1+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]}} = \frac{x\,y}{n\sqrt{(x^2+n^2)(y^2+n^2)}}.$$

Die Kräfte N_x, N_y, T ergeben in der Schale Hauptkräfte, und zwar

$$\operatorname{tg} 2\tau = -\frac{2\,T\sin\delta + N_y \sin 2\delta}{N_x + 2\,T\cos\delta + N_y\cos 2\delta},$$

$$N_{1,2} = N_x \frac{\sin^2\tau}{\sin\delta} \pm 2\,T\frac{\sin\tau\sin(\delta+\tau)}{\sin\delta} + N_y\frac{\sin^2(\delta+\tau)}{\sin\delta}.$$

Auch in der Grundrißebene können aus $\mathfrak{N}_x$, $\mathfrak{N}_y$, $\mathfrak{T}$ die Hauptkräfte bestimmt werden:

$$\operatorname{tg} 2\tau' = \frac{2\,\mathfrak{T}}{\mathfrak{N}_x - \mathfrak{N}_y},$$

$$\mathfrak{N}_{1,2} = \mathfrak{N}_x \sin^2\tau' \pm 2\,\mathfrak{T}\sin\tau'\cos\tau' + \mathfrak{N}_y\cos^2\tau',$$

was bei flachen Schalen für die Bemessung ausreichend ist.

15. Zusammenfassung. Das hyperbolische Paraboloid $z = \frac{c}{a^2} x\,y$ wird nach der Membrantheorie für eine Reihe von Belastungen mit Hilfe einer Spannungsfunktion berechnet. Für die Grundrißprojektionen der Membrankräfte, bezogen auf die Einheit der Grundrißfläche, werden geschlossene Ausdrücke angeführt, aus denen die wahre Größe der Membrankräfte berechnet werden kann.

Für Windlast wird der Neigungswinkel der Windrichtung gegen die Tangentialebene im allgemeinen Flächenpunkte angegeben und daraus die Belastung senkrecht zur Fläche festgestellt, welche, in die drei Achsenkomponenten zerlegt, die Schubkraft, und durch Differentiation und Integration die achsenparallelen Normalkräfte liefert.

Ähnlich wird bei hydrostatischer und waagerechter Belastung vorgegangen; weiter wird eine Reihe senkrechter Belastungen behandelt (Keil-, Trapez-, Parabel- und windschiefe Belastung, sowie gleichförmige Belastung der Oberfläche und des Grundrisses). Auch wird die Berechnung der Schale mit erhöhten Giebeln gezeigt.

(Eingegangen am 18. März 1944.)

Das Aufheizen einer Wand durch eine anlaufende Heizanlage.

Von **K. Ludwig** in Hannover.

1. Bezugnahme auf das Schrifttum. Beim Aufheizen einer Wand erreicht die Dichte des eintretenden Wärmestromes ihre volle Größe nicht sofort, sondern allmählich. Dieser Anlauf kann durch die Funktion $q\,(1-e^{-a\,b^2\,t})$ erfaßt werden, in der a die Temperaturleitfähigkeit bedeutet. Diesen Vorgang hat *Zd. Laštovka* an der Anstalt für wirtschaftliche Brennstoffausnützung, Prag, in seiner Arbeit[1] „Aufheizen und Abkühlen von Räumen bei zeitlich unterbrochenem Heizbetrieb", berechnet. Da *Laštovka* für das den Anlauf erfassende partikuläre Integral den besonderen Ansatz $A\,e^{-a\,b^2\,t}\sin b\,x$ benutzt, kann er das Aufheizen nur für solche Zeitkonstanten $\frac{1}{a\,b^2}$ des Anlaufs berechnen, deren Konstante b eine Wurzel der Gleichung $\operatorname{tg} b\,\delta = -\frac{\lambda}{a\,\delta}\,b\,\delta$ ist; in seinem Zahlenbeispiel einer Wand aus Ziegelsteinen mit der Wärmeleitfähigkeit $\lambda = 0{,}75$ kcal/m h Grad, der auf die Gewichtseinheit bezogenen spezifischen Wärme $c = 0{,}22$ kcal/kg Grad, dem auf die Raumeinheit bezogenen Gewicht $\gamma = 1705$ kg/m³, der Dicke $\delta = 0{,}5$ m und der Wärmeübergangsfähigkeit $\alpha = 20$ kcal/m²h Grad der Außenseite wird aus der Folge

$$a\,b_1^2 = 0{,}068\;\;4\tfrac{6}{4}\,\frac{1}{h}\,,\qquad a\,b_2^2 = 0{,}275\;\;4\tfrac{7}{2}\,\frac{1}{h}\,,\qquad a\,b_3^2 = 0{,}62\,2\tfrac{5}{4}\tfrac{0}{8}\,\frac{1}{h}\,,\qquad a\,b_4^2 = 1{,}121\,\tfrac{3}{1}\,\frac{1}{h}$$

der vierte Wert gewählt. In der folgenden Arbeit wird der Vorgang für jede beliebige Zeitkonstante des Anlaufs berechnet.

2. Formulierung des Aufheizens. Die Anfangstemperatur und die Temperatur ϑ der Außenluft sind 0°. Die Anfangsbedingung ist also $\vartheta_{t=0} = 0$. Auf der Innenseite hat der durch die Flächeneinheit eintretende Wärmestrom die Größe $q\,(1-e^{-a\,b^2\,t})$. Die Raumkoordinate x wird von der Innenseite aus gerechnet. Die Randbedingungen sind also

$$-\lambda\left(\frac{\partial\,\vartheta}{\partial\,x}\right)_{x=0} = q\,(1-e^{-a\,b^2\,t})\,,\qquad -\lambda\left(\frac{\partial\,\vartheta}{\partial\,x}\right)_{x=\delta} = \alpha\,\vartheta_{x=\delta}\,.$$

Für die Wärmeleitung gilt die Differentialgleichung

$$\frac{\partial\,\vartheta}{\partial\,t} = a\,\frac{\partial^2\,\vartheta}{\partial\,x^2}\,.$$

3. Berechnung eines partikulären Integrals. Der konstante Störungssummand q in der Randbedingung für die Innenseite wird durch das partikuläre Integral

$$\vartheta_p = c_0 + c_1\,x$$

erfaßt mit

$$c_1 = -\frac{q}{\lambda}\,,\qquad c_0 = \left(\frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha}\right)q\,.$$

Der veränderliche Störungssummand $-q\,e^{-a\,b^2\,t}$ in derselben Randbedingung wird durch das partikuläre Integral

$$\vartheta_p = e^{-a\,b^2\,t}\,(A\sin b\,x + B\cos b\,x)$$

erfaßt mit

$$A = \frac{q}{\lambda\,b}\,,\qquad B = \frac{q}{\lambda\,b}\,\frac{\lambda\,b\cos b\,\delta + \alpha\sin b\,\delta}{\lambda\,b\sin b\,\delta - \alpha\cos b\,\delta}\,.$$

4. Berechnung des allgemeinen Integrals der Differentialgleichung und der Randbedingungen ohne Störungssummanden. Der Bernoullische Produkt- und d'Alembertsche Exponentialansatz

$$\vartheta_0 = e^{-a\,k^2\,t}\,(C\sin k\,x + D\cos k\,x)$$

---

[1] *Zd. Laštovka.* Forschung 13 (1942) S. 257.

wird in die Randbedingungen ohne Störungssummanden eingesetzt und gibt

$$C = 0, \qquad \operatorname{ctg} k\delta = \frac{\lambda}{a\delta}\, k\delta.$$

Demnach ist die Temperatur

$$\vartheta = q\Big[\frac{1}{a} + \frac{\delta - x}{\lambda} + \frac{e^{-a b^2 t}}{\lambda b}\Big(\sin bx + \frac{\lambda b \cos b\delta + a \sin b\delta}{\lambda b \sin b\delta - a \cos b\delta} \cos bx\Big)\Big] + \sum_{n=1}^{\infty} D_n e^{-a k_n^2 t} \cos k_n x.$$

5. Erfüllung der Anfangsbedingung. Aus der Anfangsbedingung folgt

$$\sum_{n=1}^{\infty} D_n \cos k_n x = q\Big[-\frac{1}{a} + \frac{x-\delta}{\lambda} - \frac{1}{\lambda b}\Big(\sin bx + \frac{\lambda b \cos b\delta + a \sin b\delta}{\lambda b \sin b\delta - a \cos b\delta} \cos bx\Big)\Big].$$

Mit Hilfe der Orthogonalität erhält man

$$D_n = \frac{2q}{\delta + \dfrac{\sin 2k_n\delta}{2k_n}} \int_0^{\delta} \Big[-\frac{1}{a} + \frac{x-\delta}{\lambda} - \frac{1}{\lambda b}\Big(\sin bx + \frac{\lambda b \cos b\delta + a \sin b\delta}{\lambda b \sin b\delta - a \cos b\delta} \cos bx\Big)\Big] \cos k_n x\, dx.$$

Das Integral wird ausgewertet:

$$D_n = \frac{2q}{\delta + \dfrac{\sin 2k_n\delta}{2k_n}}\Big[-\frac{\sin k_n\delta}{a k_n} - \frac{1 - \cos k_n\delta}{\lambda k_n^2} + \frac{1}{\lambda(k_n^2 - b^2)} - \frac{\lambda k_n \sin k_n\delta - a \cos k_n\delta}{\lambda(k_n^2 - b^2)(\lambda b \sin b\delta - a \cos b\delta)}\Big].$$

Diese Entwicklungskoeffizienten werden mit Hilfe der Gleichung für die Eigenwerte vereinfacht:

$$D_n = \frac{2q}{\delta + \dfrac{\lambda a}{\lambda^2 k_n^2 + a^2}} \frac{b^2}{\lambda k_n^2 (k_n^2 - b^2)}.$$

Demnach ist die Temperatur

$$\vartheta = q\Big[\frac{1}{a} + \frac{\delta - x}{\lambda} + \frac{e^{-a b^2 t}}{\lambda b}\Big(\sin bx + \frac{\lambda b \cos b\delta + a \sin b\delta}{\lambda b \sin b\delta - a \cos b\delta} \cos bx\Big) + \frac{2b^2}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-a k_n^2 t} \cos k_n x}{\Big(\delta + \dfrac{\lambda a}{\lambda^2 k_n^2 + a^2}\Big) k_n^2 (k_n^2 - b^2)}\Big].$$

6. Resonanz. Wird die Konstante b des Anlaufs einem Eigenwert k_n etwa dem j-ten gleich, so werden die Nenner $\lambda b \sin b\delta - a \cos b\delta$ und $k_j^2 - b^2$ je gleich Null. Zunächst wird dieser Grenzprozeß durchgeführt:

$$\begin{aligned}
\vartheta &= q\Big\{\frac{1}{a} + \frac{\delta - x}{\lambda} + \frac{e^{-a k_j^2 t} \sin k_j x}{\lambda k_j} + \frac{1}{\lambda}\Big[\lim_{b \to k_j} \frac{\lambda b \cos b\delta + a \sin b\delta}{b(\lambda b \sin b\delta - a \cos b\delta)} e^{-a b^2 t} \cos bx + \\
&\quad + \frac{2b^2 e^{-a k_j^2 t} \cos k_j x}{\Big(\delta + \dfrac{\lambda a}{\lambda^2 k_j^2 + a^2}\Big) k_j^2 (k_j^2 - b^2)}\Big] + \frac{2k_j^2}{\lambda} \sum_{n \neq j} \frac{e^{-a k_n^2 t} \cos k_n x}{\Big(\delta + \dfrac{\lambda a}{\lambda^2 k_n^2 + a^2}\Big) k_n^2 (k_n^2 - k_j^2)}\Big\} \\
&= q\Big\{\frac{1}{a} + \frac{\delta - x}{\lambda} + \frac{e^{-a k_j^2 t} \sin k_j x}{\lambda k_j} - \frac{e^{-a k_j^2 t}}{2\lambda k_j (\lambda \sin k_j\delta + a\delta \sin k_j\delta + \lambda k_j \delta \cos k_j\delta)} \times \\
&\quad \times \Big[\Big(a \frac{\sin k_j\delta}{k_j} - \lambda \cos k_j\delta - 2a\delta \cos k_j\delta + 2\lambda k_j \delta \sin k_j\delta + \\
&\quad + \frac{4\lambda \dfrac{\sin k_j\delta}{k_j} + 4a\delta \dfrac{\sin k_j\delta}{k_j} + 6\lambda\delta \cos k_j\delta + a\delta^2 \cos k_j\delta - \lambda k_j \delta^2 \sin k_j\delta}{\delta + \dfrac{\lambda a}{\lambda^2 k_j^2 + a^2}}\Big) \cos k_j x + \\
&\quad + 2(a \sin k_j\delta + \lambda k_j \cos k_j\delta)(2a k_j t \cos k_j x + x \sin k_j x)\Big] + \\
&\quad + \frac{2k_j^2}{\lambda} \sum_{n \neq j} \frac{e^{-a k_n^2 t} \cos k_n x}{\Big(\delta + \dfrac{\lambda a}{\lambda^2 k_n^2 + a^2}\Big) k_n^2 (k_n^2 - k_j^2)}\Big\}.
\end{aligned}$$

Dieser Grenzwert wird mit Hilfe der Gleichung für die Eigenwerte vereinfacht:

$$\vartheta = q\left\{\frac{1}{a}+\frac{\delta-x}{\lambda}+\frac{e^{-a k_j^2 t}\sin k_j x}{\lambda k_j}-\frac{e^{-a k_j^2 t}}{\lambda\left(\delta+\frac{\lambda a}{\lambda^2 k_j^2+a^2}\right)}\times\right.$$

$$\times\left[\left(\frac{5}{2k_j^2}-\frac{\lambda^3 a}{(a^2+\lambda^2 k_j^2)\,(\lambda a+a^2\delta+\lambda^2\delta k_j^2)}\right)\cos k_j x+2\,a\,t\cos k_j x+\frac{x\sin k_j x}{k_j}\right]+$$

$$\left.+\frac{2k_j^2}{\lambda}\sum_{n\neq j}\frac{e^{-a k_n^2 t}\cos k_n x}{\left(\delta+\frac{\lambda a}{\lambda^2 k_n^2+a^2}\right)k_n^2\,(k_n^2-k_j^2)}\right\}.$$

In einem Resonanzfall wird das den veränderlichen Störungssummanden erfassende partikuläre Integral

$$\vartheta_p = e^{-a k_j^2 t}\left\{f_0(x)+t f_1(x)\right\}$$

gesetzt. Aus der Differentialgleichung folgt

$$-a k_j^2\left\{f_0+t f_1\right\}+f_1 = a\left\{\frac{d^2 f_0}{dx^2}+t\frac{d^2 f_1}{dx^2}\right\}.$$

Diese Identität in bezug auf die Zeit zerfällt in die Bestimmungsgleichungen

$$\frac{d^2 f_1}{dx^2} = -k_j^2 f_1, \qquad \frac{d^2 f_0}{dx^2} = -k_j^2 f_0+\frac{1}{a}f_1.$$

Die erste Bestimmungsgleichung hat das allgemeine Integral

$$f_1 = A\sin k_j x + B\cos k_j x.$$

Die zweite Bestimmungsgleichung wird durch Konstantenvariation integriert:

$$f_0 = E\sin k_j x + F\cos k_j x,$$

$$\sin k_j x\,\frac{dE}{dx}+\cos k_j x\,\frac{dF}{dx} = 0,$$

$$\cos k_j x\,\frac{dE}{dx}-\sin k_j x\,\frac{dF}{dx} = \frac{1}{a k_j}(A\sin k_j x + B\cos k_j x),$$

$$\frac{dE}{dx} = \frac{1}{2 a k_j}(A\sin 2k_j x + B + B\cos 2k_j x),$$

$$\frac{dF}{dx} = \frac{1}{2 a k_j}(A\cos 2k_j x - A - B\sin 2k_j x),$$

$$E = \frac{1}{2 a k_j}\left(-A\frac{\cos 2k_j x}{2k_j}+Bx+B\frac{\sin 2k_j x}{2k_j}\right)+G,$$

$$F = \frac{1}{2 a k_j}\left(A\frac{\sin 2k_j x}{2k_j}-Ax+B\frac{\cos 2k_j x}{2k_j}\right)+H,$$

$$f_0 = \frac{1}{2 a k_j}\left(A\frac{\sin k_j x}{2k_j}+B\frac{\cos k_j x}{2k_j}+Bx\sin k_j x - Ax\cos k_j x\right)+G\sin k_j x+H\cos k_j x.$$

Daher ist das den veränderlichen Störungssummanden erfassende partikuläre Integral

$$\vartheta_p = e^{-a k_j^2 t}\left[\frac{1}{2 a k_j}\left(A\frac{\sin k_j x}{2k_j}+B\frac{\cos k_j x}{2k_j}+Bx\sin k_j x - Ax\cos k_j x\right)+\right.$$
$$\left.+G\sin k_j x+H\cos k_j x+t\,(A\sin k_j x+B\cos k_j x)\right].$$

Aus den Randbedingungen folgt

$$\frac{1}{4 a k_j}A - k_j G - k_j A t = -\frac{q}{\lambda},$$

$$\frac{1}{2a}\left(A\frac{\cos k_j\delta}{2k_j}-B\frac{\sin k_j\delta}{2k_j}-B\delta\cos k_j\delta - A\delta\sin k_j\delta\right)-k_j G\cos k_j\delta+k_j H\sin k_j\delta -$$
$$-k_j t\,(A\cos k_j\delta - B\sin k_j\delta) = \frac{a}{\lambda}\left[\frac{1}{2 a k_j}\left(A\frac{\sin k_j\delta}{2k_j}+B\frac{\cos k_j\delta}{2k_j}+B\delta\sin k_j\delta -\right.\right.$$
$$\left.\left.-A\delta\cos k_j\delta\right)+G\sin k_j\delta+H\cos k_j\delta+t\,(A\sin k_j\delta+B\cos k_j\delta)\right].$$

Die letzte Gleichung wird mit Hilfe der Gleichung zur Bestimmung der Eigenwerte vereinfacht:

$$\frac{1}{2a}\left(\frac{\lambda^2}{2}A-\frac{\lambda a}{k_j}B-\lambda^2 k_j\delta B\right)-\lambda^2 k_j^2 G-\lambda^2 k_j^2 t A=a^2\left[\frac{1}{2a k_j}\left(\frac{1}{2k_j}A+B\delta\right)+G+tA\right].$$

Diese Identitäten in bezug auf die Zeit zerfallen in die Bestimmungsgleichungen

$$A=0,\qquad G=\frac{q}{\lambda k_j},\qquad B=-2\frac{a}{\lambda}\frac{q}{\delta+\frac{\lambda a}{\lambda^2 k_j^2+a^2}}.$$

Demnach ist die Temperatur

$$\vartheta=q\left\{\frac{1}{a}+\frac{\delta-x}{\lambda}-\frac{e^{-a k_j^2 t}}{\lambda}\left[\frac{1}{k_j\delta+\frac{\lambda a k_j}{\lambda^2 k_j^2+a^2}}\left(\frac{\cos k_j x}{2k_j}+x\sin k_j x\right)-\frac{\sin k_j x}{k_j}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{2a}{\delta+\frac{\lambda a}{\lambda^2 k_j^2+a^2}}t\cos k_j x\right]\right\}+\sum_{n=1}^{\infty}D_n e^{-a k_n^2 t}\cos k_n x.$$

Aus der Anfangsbedingung folgt

$$\sum_{n=1}^{\infty}D_n\cos k_n x=q\left\{-\frac{1}{a}-\frac{1}{\lambda}\left[\delta-x-\frac{1}{k_j\delta+\frac{\lambda a k_j}{\lambda^2 k_j^2+a^2}}\left(\frac{\cos k_j x}{2k_j}+x\sin k_j x\right)+\frac{\sin k_j x}{k_j}\right]\right\}.$$

Mit der Orthogonalität erhält man

$$D_n=\frac{2q}{\delta+\frac{\sin 2k_n\delta}{2k_n}}\int_0^{\delta}\left\{-\frac{1}{a}-\frac{1}{\lambda}\left[\delta-x-\frac{1}{k_j\delta+\frac{\lambda a k_j}{\lambda^2 k_j^2+a^2}}\left(\frac{\cos k_j x}{2k_j}+x\sin k_j x\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\sin k_j x}{k_j}\right]\right\}\cos k_n x\,dx.$$

Das Integral wird ausgewertet:

$$D_{n\neq j}=\frac{2q}{\delta+\frac{\sin 2k_n\delta}{2k_n}}\left\{\frac{\sin k_n\delta}{a k_n}-\frac{1-\cos k_n\delta}{\lambda k_n^2}+\frac{1}{\lambda\left[k_n^2-k_j^2\right]\left[k_j\delta+\frac{\lambda a k_j}{\lambda^2 k_j^2+a^2}\right]}\times\right.$$

$$\times\left[\frac{k_n}{2k_j}\cos k_j\delta\sin k_n\delta-\frac{\sin k_j\delta\cos k_n\delta}{2}+k_j\delta\cos k_j\delta\cos k_n\delta+\right.$$

$$\left.+k_n\delta\sin k_j\delta\sin k_n\delta-2\frac{k_j k_n\cos k_j\delta\sin k_n\delta}{k_n^2-k_j^2}+\frac{k_n^2+k_j^2}{k_n^2-k_j^2}\sin k_j\delta\cos k_n\delta\right]-$$

$$\left.-\frac{1-\cos k_j\delta\cos k_n\delta-\frac{k_n}{k_j}\sin k_j\delta\sin k_n\delta}{\lambda\left[k_n^2-k_j^2\right]}\right\},$$

$$D_j=\frac{4q}{2k_j\delta+\sin 2k_j\delta}\left\{-\frac{\sin k_j\delta}{a}-\frac{1}{\lambda k_j}\left[1-\cos k_j\delta+\frac{2k_j\delta\cos 2k_j\delta-\sin 2k_j\delta}{8\left(k_j\delta+\frac{\lambda a k_j}{\lambda^2 k_j^2+a^2}\right)}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{\cos 2k_j\delta}{4}\right]\right\}.$$

Werden die Entwicklungskoeffizienten mit Hilfe der Gleichung zur Bestimmung der Eigenwerte vereinfacht, so ergibt sich dieselbe Temperatur wie durch den Grenzprozeß.

7. Lösung nach der Operatorenmethode. Die partielle Differentialgleichung mit der Anfangsbedingung geht durch die Laplacesche Integraltransformation

$$\bar{\vartheta}=\int_0^{\infty}e^{-st}\vartheta\,dt\ \text{mit}\ \Re e\,(s)>0$$

in die gewöhnliche Differentialgleichung

$$s\bar{\vartheta}=a\frac{d^2\bar{\vartheta}}{dx^2}$$

über. Deren allgemeines Integral ist

$$\bar{\vartheta} = K_1 \operatorname{Sin} \sqrt{\frac{s}{a}}\, x + K_2 \operatorname{Cof} \sqrt{\frac{s}{a}}\, x.$$

Die transformierten Randbedingungen

$$-\lambda \left(\frac{d\bar{\vartheta}}{dx}\right)_{x=0} = q\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + a b^2}\right), \qquad -\lambda \left(\frac{d\bar{\vartheta}}{dx}\right)_{x=\delta} = a \bar{\vartheta}_{x=\delta}$$

werden durch die transformierte Temperatur

$$\bar{\vartheta} = \frac{q}{\lambda}\left(\frac{1}{s + a b^2} - \frac{1}{s}\right) \sqrt{\frac{a}{s}} \left(\operatorname{Sin} \sqrt{\frac{s}{a}}\, x - \frac{\lambda \sqrt{\frac{s}{a}} \operatorname{Cof} \sqrt{\frac{s}{a}}\, \delta + a \operatorname{Sin} \sqrt{\frac{s}{a}}\, \delta}{\lambda \sqrt{\frac{s}{a}} \operatorname{Sin} \sqrt{\frac{s}{a}}\, \delta + a \operatorname{Cof} \sqrt{\frac{s}{a}}\, \delta} \operatorname{Cof} \sqrt{\frac{s}{a}}\, x \right)$$

erfüllt. Die Temperatur wird nach der Riemann-Mellinschen Umkehrformel

$$\vartheta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - \infty i}^{\sigma + \infty i} e^{t s}\, \bar{\vartheta}\, ds$$

berechnet; hierin muß der Integrationsweg so gewählt werden, daß die Pole der transformierten Temperatur links vom Integrationswege liegen:

$$\vartheta = \frac{q}{2\pi i \lambda} \int_{\sigma - \infty i}^{\sigma + \infty i} e^{t s} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + a b^2}\right) \sqrt{\frac{a}{s}}\, \frac{\lambda \operatorname{Cof} \sqrt{\frac{s}{a}}\,(x - \delta) - a \sqrt{\frac{a}{s}} \operatorname{Sin} \sqrt{\frac{s}{a}}\,(x - \delta)}{\lambda \operatorname{Sin} \sqrt{\frac{s}{a}}\, \delta + a \sqrt{\frac{a}{s}} \operatorname{Cof} \sqrt{\frac{s}{a}}\, \delta}\, ds.$$

Die Pole der transformierten Temperatur sind $s = 0$, $s = -a b^2$ und $s = -a k^2$. Für den Pol $s = 0$ ist das Residuum

$$\lim_{s \to 0} e^{t s}\, \frac{\lambda \operatorname{Cof} \sqrt{\frac{s}{a}}\,(x - \delta) - a \sqrt{\frac{a}{s}} \operatorname{Sin} \sqrt{\frac{s}{a}}\,(x - \delta)}{\lambda \sqrt{\frac{s}{a}} \operatorname{Sin} \sqrt{\frac{s}{a}}\, \delta + a \operatorname{Cof} \sqrt{\frac{s}{a}}\, \delta} = \frac{\lambda}{a} + \delta - x.$$

Ist b von jeder Wurzel k verschieden, so haben die Pole $s = -a b^2$ und $s = -a k^2$ den Grad 1. Für den Pol $s = -a b^2$ ist das Residuum

$$\left| e^{t s}\, \frac{\lambda \operatorname{Cof} \sqrt{\frac{s}{a}}\,(x - \delta) - a \sqrt{\frac{a}{s}} \operatorname{Sin} \sqrt{\frac{s}{a}}\,(x - \delta)}{\lambda \sqrt{\frac{s}{a}} \operatorname{Sin} \sqrt{\frac{s}{a}}\, \delta + a \operatorname{Cof} \sqrt{\frac{s}{a}}\, \delta} \right|_{s = -a b^2}$$

$$= e^{-a b^2 t}\, \frac{\lambda \cos b(x - \delta) - \frac{a}{b} \sin b(x - \delta)}{\lambda b \sin b\delta - a \cos b\delta} = \frac{1}{b} e^{-a b^2 t} \left(\sin b x + \frac{\lambda b \cos b\delta + a \sin b\delta}{\lambda b \sin b\delta - a \cos b\delta} \cos b x \right).$$

Für die Pole $s = -a k^2$ sind die Residuen

$$\left| e^{t s} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + a b^2}\right) \frac{\lambda \operatorname{Cof} \sqrt{\frac{s}{a}}\,(x - \delta) - a \sqrt{\frac{a}{s}} \operatorname{Sin} \sqrt{\frac{s}{a}}\,(x - \delta)}{\frac{d}{ds}\left(\lambda \sqrt{\frac{s}{a}} \operatorname{Sin} \sqrt{\frac{s}{a}}\, \delta + a \operatorname{Cof} \sqrt{\frac{s}{a}}\, \delta\right)} \right|_{s = -a k^2}$$

$$= e^{-a k^2 t}\, \frac{b^2}{a k^2 (k^2 - b^2)}\, \frac{\lambda \cos k(x - \delta) - \frac{a}{k} \sin k(x - \delta)}{\lambda \sin k\delta + \lambda k \delta \cos k\delta + a \delta \sin k\delta}\, 2 a k = \frac{2 b^2}{k^2 (k^2 - b^2)}\, \frac{e^{-a k^2 t} \cos k x}{\delta - \frac{\sin 2 k \delta}{2 k}}.$$

Ist $b = k_j$, so hat der Pol $s = -a k_j^2$ den Grad 2. Um für diesen Pol das Residuum zu erhalten, werden der Zähler

$$e^{t s} \left| \lambda \operatorname{Cof} \sqrt{\frac{s}{a}}\,(x - \delta) - a \sqrt{\frac{a}{s}} \operatorname{Sin} \sqrt{\frac{s}{a}}\,(x - \delta) \right|$$

und der Nenner

$$\lambda \sqrt{\frac{s}{a}}\,\mathfrak{Sin}\sqrt{\frac{s}{a}}\,\delta + a\,\mathfrak{Cof}\sqrt{\frac{s}{a}}\,\delta$$

nach Potenzen von $s+a k_j^2$ entwickelt:

$$\begin{aligned}
e^{t\,s}\left[\lambda\,\mathfrak{Cof}\sqrt{\frac{s}{a}}(x-\delta) - a\sqrt{\frac{a}{s}}\,\mathfrak{Sin}\sqrt{\frac{s}{a}}(x-\delta)\right] &= e^{-a k_j^2 t}\left\{\lambda\cos k_j(x-\delta) - \right.\\
&-\frac{a}{k_j}\sin k_j(x-\delta) + \left[\left(\lambda\cos k_j(x-\delta) - \frac{a}{k_j}\sin k_j(x-\delta)\right)t + \right.\\
&+\left.\left(\lambda(x-\delta)\sin k_j(x-\delta) - \frac{a}{k^2}\sin k_j(x-\delta) + \frac{a}{k_j}(x-\delta)\cos k_j(x-\delta)\right)\frac{1}{2\,a\,k_j}\right]\times\\
&\left.\times\left[s+a k_j^2\right] + \cdots\right\}\\
&= e^{-a k_j^2 t}\left\{\lambda\frac{\cos k_j x}{\cos k_j\delta} + \left[\lambda t\frac{\cos k_j x}{\cos k_j\delta} + \frac{1}{2\,a\,k_j}\left(\frac{\lambda x\sin k_j x}{\cos k_j\delta} - \right.\right.\right.\\
&\left.\left.\left.-\frac{\lambda}{\cos k_j\delta}\left(\delta + \frac{\sin 2k_j\delta}{2k_j}\right)\sin k_j x + \frac{a}{k_j^2}\sin k_j\delta\cos k_j x\right)\right]\left[s+a k_j^2\right] + \cdots\right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda\sqrt{\frac{s}{a}}\,\mathfrak{Sin}\sqrt{\frac{s}{a}}\,\delta + a\,\mathfrak{Cof}\sqrt{\frac{s}{a}}\,\delta &= \left(\frac{\lambda+a\delta}{2\sqrt{a\,s}}\,\mathfrak{Sin}\sqrt{\frac{s}{a}}\,\delta + \frac{\lambda\delta}{2a}\,\mathfrak{Cof}\sqrt{\frac{s}{a}}\,\delta\right)_{s=-a k_j^2}(s+a k_j^2) -\\
&-\left(\frac{\lambda+a\delta}{8\sqrt{a}\sqrt{s^3}}\,\mathfrak{Sin}\sqrt{\frac{s}{a}}\,\delta - \frac{\lambda+a\delta}{8\,a\,s}\,\delta\,\mathfrak{Cof}\sqrt{\frac{s}{a}}\,\delta - \frac{\lambda\delta^2}{8\sqrt{a^3}\sqrt{s}}\,\mathfrak{Sin}\sqrt{\frac{s}{a}}\,\delta\right)_{s=-a k_j^2}(s+a k_j^2)^2 + \cdots\\
&= \left(\frac{\lambda+a\delta}{2\,a\,k_j}\sin k_j\delta + \frac{\lambda\delta}{2\,a}\cos k_j\delta\right)(s+a k_j^2) +\\
&+\left(\frac{\lambda+a\delta}{8\,a^2 k_j^3}\sin k_j\delta - \frac{\lambda+a\delta}{8\,a^2 k_j^2}\delta\cos k_j\delta + \frac{\lambda\delta^2}{8\,a^2 k_j}\sin k_j\delta\right)(s+a k_j^2)^2 + \cdots\\
&= \frac{\lambda}{2\,a\cos k_j\delta}\left(\delta + \frac{\sin 2k_j\delta}{2k_j}\right)(s+a k_j^2) +\\
&+\left(\frac{\lambda+a\delta}{8\,a^2 k_j^3}\sin k_j\delta - \frac{\lambda\delta}{8\,a^2 k_j^2}\cos k_j\delta\right)(s+a k_j^2)^2 + \cdots.
\end{aligned}$$

Das Residuum ist

$$\begin{aligned}
e^{-a k_j^2 t}\left\{-\frac{2}{k_j^2}\frac{\cos k_j x}{\delta + \frac{\sin 2k_j\delta}{2k_j}} + \frac{\frac{\lambda+a\delta}{k_j}\sin k_j\delta - \lambda\delta\cos k_j\delta}{2\lambda k_j^2\left(\delta + \frac{\sin 2k_j\delta}{2k_j}\right)^2}\cos k_j\delta\cos k_j x - \right.&\\
-\frac{\cos k_j\delta}{\lambda\left(\delta + \frac{\sin 2k_j\delta}{2k_j}\right)}\left[2\,a\,\lambda\,t\frac{\cos k_j x}{\cos k_j\delta} + \frac{\lambda x\sin k_j x}{k_j\cos k_j\delta} - \right.&\\
\left.\left.-\frac{\lambda}{k_j\cos k_j\delta}\left(\delta + \frac{\sin 2k_j\delta}{2k_j}\right)\sin k_j x + \frac{a}{k_j^3}\sin k_j\delta\cos k_j x\right]\right\}&\\
= e^{-a k_j^2 t}\left\{\frac{\sin k_j x}{k_j} - \frac{1}{\delta + \frac{\sin 2k_j\delta}{2k_j}}\times\right.&\\
\left.\times\left[\left(\frac{5}{2k_j^2} - \frac{\lambda^3 a}{(a^2+\lambda^2 k_j^2)(\lambda a + a^2\delta + \lambda^2\delta k_j^2)}\right)\cos k_j x + 2\,a\,t\cos k_j x + \frac{x\sin k_j x}{k_j}\right]\right\}.&
\end{aligned}$$

Demnach führt die Operatorenmethode, sowohl wenn keine Resonanz vorliegt als auch wenn Resonanz vorliegt, zu demselben Ergebnis wie der Summenansatz.

(Eingegangen am 2. April 1944.)

Zwei- und vierseitig aufgelagerte Rechteckplatten unter Einzelkraftbelastung.

Von R. Ohlig in Wiesbaden.

1. Allgemeines. Im Stahlbetonbrückenbau wird die auf zwei gegenüberliegenden Seiten aufgelagerte Platte infolge ihrer wirtschaftlichen und konstruktiven Vorteile in steigendem Maße verwendet als freiaufliegende oder durchlaufende Platte, Rahmen- und Gerberbrücke. Mit den wachsenden Spannweiten dieser Konstruktionen wird es notwendig, einen genaueren Einblick in die Spannungsverhältnisse zu gewinnen. Durch die „Berechnungsgrundlagen für massive Brücken" (DIN 1075) ist eine gewisse Verteilungsbreite B für die Belastung durch den Raddruck der Fahrzeuge festgelegt; ihr Wert soll $B = t + 2s$ bzw. $\frac{2}{3}a$ sein, wobei als obere Begrenzung das Maß $t+2s+2{,}00$ (m) gilt[1]. Hierbei bedeutet t das Aufstandsmaß des Rades und s die Stärke der Deckschicht über der Platte. Diese Festsetzung versagt, wenn bei größeren Plattenspannweiten eine Überschneidung der Belastungsbreiten eintritt. Für eine bestimmte Lastgruppe – Brückenklasse I DIN 1072 – ist für die freiaufliegende Platte die Gültigkeit der obigen Bestimmung unter gewissen Vereinfachungen der Lastengruppierung in einer früheren Abhandlung[2] nachgewiesen worden. Inzwischen wurde bei der 5. Ausgabe von DIN 1072 (April 1941) eine weitere Regellast in Form des Raupenfahrzeugs eingeführt (Brückenklasse IA). Um auch andere Verkehrslasten, Straßenbahn- und Schnellbahnzüge in ihrer Wirkung auf die Platte erfassen zu können, wird deshalb die Berechnung von Einflußflächen erforderlich. Ein direkter Weg zu ihrer Ermittlung ist bereits angegeben[2]. Ein weiterer soll nachfolgend unter Benutzung der Einflußflächen für die vierseitig aufgelagerte Platte beschritten werden[3]. Unter den in der Plattentheorie üblichen Annahmen, daß die Dicke h klein gegenüber den sonstigen Abmessungen der Platte ist, daß ferner die Durchbiegungen klein sind im Vergleich zur Plattendicke, lauten die Grundformeln für die Spannungsmomente

$$m_x = -N\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right),$$

$$m_y = -N\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right),$$

$$m_{xy} = -(1-\nu) N \frac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial y}, \text{ wobei } N = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}.$$

Es bedeutet keine Einschränkung der Allgemeinheit der Ergebnisse, wenn im folgenden zur Vereinfachung die im Stahlbeton übliche Annahme einer verschwindenden Querdehnung, $\nu = 0$, getroffen wird.

Die Lösung der Differentialgleichung für die Durchbiegung

$$\Delta\Delta w = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\, \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^2} = \frac{p}{N}$$

führt im Falle einer Punktbelastung zu unendlich großen Spannungen unter der konzentrierten Last (Singularität). Die Einflußfläche läuft an der Lastangriffsstelle in eine dünne, unendlich lange Spitze aus, deren Rauminhalt endlich ist, jedoch nicht ohne weiteres aus der Einflußfläche berechnet werden kann. In Anpassung an die Wirklichkeit, wo punktförmige Lasten nicht auftreten, nimmt *Bittner*[4] von vornherein eine Verteilung der Einzellast auf bestimmte Verteilungsflächen (Lastrechtecke) vor und ermittelt die Größtmomente durch Integration über diese Flächen. *Pucher*[5] macht die logarithmische Singularität zum Ausgangspunkt der Berechnung der

---

[1] In der Neufassung von DIN 1075 (Oktober 1944) sind diese Werte abgeändert und bezüglich des Raupenfahrzeugs ergänzt.

[2] *R. Ohlig*, Bauing. 19 (1938) S. 455.

[3] Den gleichen Gegenstand behandeln *H. Olsen* und *F. Reinitzhuber*, Bautechnik 21 (1943) S. 188. Das dort angekündigte Buch „Die zweiseitig gelagerte Platte" war bei der Drucklegung noch nicht erschienen.

[4] *E. Bittner*, Momententafeln und Einflußflächen für kreuzweise bewehrte Eisenbetonplatten, Wien 1938.

[5] *A. Pucher*, Die Momenteneinflußfelder rechteckiger Platten. Deutscher Ausschuß für Eisenbeton, Heft 90, Berlin 1938; sowie Ing.-Arch. 12 (1941) S. 76.

Einflußwerte für die Schnittkräfte und berechnet den Fehler, der beim Abbrechen des unendlich langen trichterförmigen Teils der Fläche unter der Punktbelastung entsteht. Endliche Werte erhält man auch durch Einführung einer Linienbelastung von begrenzter Länge $2c$ an Stelle einer Punktlast[1]. Diese Methode gestattet, sich in der Praxis den mannigfachsten, durch die verschiedenen Radaufstandsflächen bedingten Abmessungen der Lastrechtecke beliebig genau anzupassen. Im Sinne der „Berechnungsgrundlagen für massive Brücken" DIN 1075 ist dann zu setzen: $2c = t + 2s$. Im folgenden Abschnitt soll zunächst der Fehler ermittelt werden, der entsteht, wenn die Einflußwerte für die Linienlast, die hiernach auf den ganzen Plattenbereich auszudehnen sind, durch diejenigen der Punktbelastung ersetzt werden und nur die Linienlastordinate des Aufpunktes eingeführt wird (reduzierte Einflußfläche).

2. Der freiaufliegende Plattenstreifen als Grundlösung. Die Gleichung der elastischen Fläche des durch eine Einzelkraft P im Punkt $x = \xi$, $y = 0$ belasteten freiaufliegenden Plattenstreifens lautet[2]

$$w = \frac{P a^2}{2\pi^3 N} \sum_m \frac{1}{m^3} (1 + \alpha y)\, e^{-\alpha y} \sin \alpha \xi \sin \alpha x \quad \left(\alpha = \frac{m\pi}{a},\ y \geqq 0,\ m = 1, 2, 3, \ldots\right). \tag{1}$$

Dieser Ansatz erfüllt längs der Geraden $x = 0$, $x = a$ die Navierschen Grenzbedingungen $w = 0$, $\Delta w = 0$. Setzt man noch

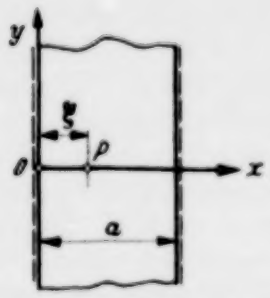

Abb 1. Punktbelastung des Plattenstreifens.

$$\varphi = N \Delta w = -\frac{m_x + m_y}{1 + \nu} = -\frac{P}{\pi} \sum \frac{e^{-\alpha y}}{m} \sin \alpha \xi \sin \alpha x, \tag{2}$$

so genügt diese Greensche Funktion des Plattenstreifens der Potentialgleichung $\Delta \varphi = 0$. Die Spannungsmomente sind damit

$$\left.\begin{aligned} m_x &= -\frac{1+\nu}{2}\varphi + \frac{1-\nu}{2} y \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \\ m_y &= -\frac{1+\nu}{2}\varphi - \frac{1-\nu}{2} y \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \\ m_{xy} &= -\frac{1-\nu}{2} y \frac{\partial \varphi}{\partial x}. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Die Funktion φ kann mittels konformer Abbildung in der Form dargestellt werden

$$\varphi = -\frac{P}{4\pi} \ln \frac{\mathfrak{Cof} \frac{\pi y}{a} - \cos \frac{\pi (x - \xi)}{a}}{\mathfrak{Cof} \frac{\pi y}{a} - \cos \frac{\pi (x + \xi)}{a}}.$$

Ihre Ableitungen sind

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \frac{P}{4a} \left[\frac{\sin \frac{\pi (x - \xi)}{a}}{\mathfrak{Cof} \frac{\pi y}{a} - \cos \frac{\pi (x - \xi)}{a}} - \frac{\sin \frac{\pi (x + \xi)}{a}}{\mathfrak{Cof} \frac{\pi y}{a} - \cos \frac{\pi (x + \xi)}{a}} \right], \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= \frac{P \,\mathfrak{Sin} \frac{\pi y}{a}}{4a} \left[\frac{1}{\mathfrak{Cof} \frac{\pi y}{a} - \cos \frac{\pi (x - \xi)}{a}} - \frac{1}{\mathfrak{Cof} \frac{\pi y}{a} - \cos \frac{\pi (x + \xi)}{a}} \right]. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Mit diesen Funktionen sind die Biegungsmomente nach (3) errechnet und in der Tafel 1 und 2 für den Querschnitt $x = \frac{a}{2}$ (Feldmitte) mit den Laststellungen $\xi = \frac{a}{2}, \frac{a}{3}, \frac{a}{6}$ in Intervallteilungen von $y = \frac{a}{12}$ angegeben[3]. Nach der Definition und den Symmetrieeigenschaften der Greenschen

[1] *R. Ohlig*, Bauing. 19 (1938) S. 455.

[2] *A. Nádai*, Die elastischen Platten, S. 81 u. f., Berlin 1925.

[3] Eine graphische Ermittlung gibt *M. Bergsträßer*, Forschungsarbeiten auf dem Gebiet des Ingenieurwesens. Heft 302. Berlin 1928.

Funktion[1] sind damit die Momenteneinflußflächen bzw. die Einflußflächen der Krümmungen $\partial^2 w/\partial x^2$ und $\partial^2 w/\partial y^2$ für Feldmitte des Plattenstreifens ermittelt. Unter der Einzellast $\left(x = \frac{a}{2}, \xi = \frac{a}{2}\right)$ werden die Momente wie der Logarithmus unendlich. Diese bei der Auswertung der Einflußflächen störende Unendlichkeitsstelle wird vermieden, wenn nun für die Punktbelastung eine Linienlast von der Länge $2c$ im Aufpunkt eingeführt wird (Abb. 2). Dann errechnen sich die Momente nach den Formeln

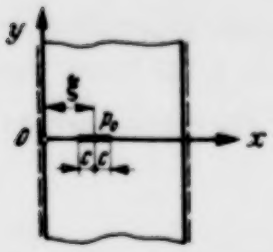

Abb. 2. Linienbelastung des Plattenstreifens.

$$m_x = \frac{p_0 a}{\pi^2} \sum \frac{1}{m^2} (1 + \alpha y)\, e^{-\alpha y} \sin \alpha \xi \sin \alpha c \sin \alpha x, \qquad (5a)$$

$$m_y = \frac{p_0 a}{\pi^2} \sum \frac{1}{m^2} (1 - \alpha y)\, e^{-\alpha y} \sin \alpha \xi \sin \alpha c \sin \alpha x. \qquad (5b)$$

$(m = 1, 2, 3, \ldots)$

Tafel 1. *Momenteneinflußfläche m_x des Plattenstreifens für Feldmitte* $\left(x = \frac{a}{2}\right)$.

Last in	$\xi = \frac{a}{2}$	$\xi = \frac{a}{3}$	$\xi = \frac{a}{6}$
$y = 0 \cdot \frac{a}{12}$	∞	0,104 80	0,043 71
1 „	0,240 92	0,111 35	0,045 60
2 „	0,184 49	0,115 12	0,048 30
3 „	0,150 27	0,109 03	0,049 64
4 „	0,125 02	0,098 00	0,048 25
5 „	0,104 78	0,085 64	0,044 66
6 „	0,087 89	0,073 56	0,039 86
7 „	0,073 62	0,062 42	0,034 67
8 „	0,061 38	0,052 51	0,029 61
9 „	0,050 99	0,043 84	0,024 95
10 „	0,042 19	0,036 38	0,020 82
11 „	0,034 76	0,029 92	0,017 24
12 „	0,028 52	0,024 67	0,014 20
13 „	0,023 33	0,020 19	0,011 63
14 „	0,019 02	0,016 46	0,009 49
15 „	0,015 46	0,013 38	0,007 72
16 „	0,012 53	0,010 85	0,006 26
17 „	0,010 09	0,008 76	0,005 05
18 „	0,008 17	0,007 07	0,004 09
19 „	0,006 57	0,005 69	0,003 28
20 „	0,005 27	0,004 57	0,002 66
21 „	0,004 23	0,003 66	0,002 12
22 „	0,003 41	0,002 91	0,001 71
23 „	0,002 71	0,002 36	0,001 33
24 „	0,002 16	0,001 87	0,001 09
25 „	0,001 73	0,001 56	0,000 93
26 „	0,001 38	0,001 26	0,000 70
27 „	0,001 09	0,000 94	0,000 56
28 „	0,000 87	0,000 74	0,000 43
29 „	0,000 68	0,000 57	0,000 34
30 „	0,000 55	0,000 46	0,000 27
31 „	0,000 44	0,000 37	0,000 22
32 „	0,000 34	0,000 30	0,000 18
33 „	0,000 27	0,000 24	0,000 14
34 „	0,000 22	0,000 19	0,000 11
35 „	0,000 17	0,000 15	0,000 09
36 „	0,000 13	0,000 12	0,000 07
37 „	0,000 11	0,000 09	0,000 05
38 „	0,000 08	0,000 07	0,000 04
39 „	0,000 07	0,000 06	0,000 03
40 „	0,000 05	0,000 045	0,000 026
41 „	0,000 04	0,000 04	0,000 021
42 „	0,000 03	0,000 03	0,000 016
	je × P		

Tafel 2. *Momenteneinflußfläche m_y für* $x = \frac{a}{2}$.

$\xi = \frac{a}{2}$	$\xi = \frac{a}{3}$	$\xi = \frac{a}{6}$
∞	0,104 80	0,043 71
0,083 59	0,081 50	0,038 33
0,032 38	0,043 26	0,016 56
0,012 74	0,015 42	0,013 56
−0,002 38	−0,001 48	0,003 20
−0,016 66	−0,011 27	−0,003 72
−0,020 74	−0,016 28	−0,007 72
−0,022 17	−0,018 32	−0,009 64
−0,021 98	−0,018 57	−0,010 21
−0,020 73	−0,017 71	−0,009 96
−0,018 93	−0,016 27	−0,009 24
−0,016 87	−0,014 45	−0,008 33
−0,014 76	0,012 76	−0,007 33
−0,012 74	−0,011 02	−0,006 34
−0,010 87	0,009 40	−0,005 42
−0,009 18	−0,007 95	−0,004 58
−0,007 70	0,006 67	−0,003 85
−0,006 39	−0,005 43	−0,003 20
−0,005 31	−0,004 60	−0,002 66
−0,004 37	−0,003 78	−0,002 18
−0,003 57	−0,003 10	−0,001 81
−0,002 93	−0,002 53	−0,001 46
−0,002 41	−0,002 04	−0,001 20
−0,001 94	−0,001 69	−0,000 94
−0,001 57	−0,001 35	−0,000 79
−0,001 27	−0,001 16	−0,000 70
−0,001 02	−0,000 95	−0,000 52
−0,000 82	−0,000 71	−0,000 43
−0,000 66	−0,000 56	−0,000 33
−0,000 52	−0,000 43	−0,000 26
−0,000 42	−0,000 35	−0,000 21
−0,000 34	−0,000 28	−0,000 17
−0,000 27	−0,000 23	−0,000 14
−0,000 22	−0,000 19	−0,000 11
−0,000 17	−0,000 15	−0,000 09
−0,000 14	−0,000 12	−0,000 07
−0,000 11	−0,000 10	−0,000 05
−0,000 09	−0,000 07	−0,000 04
−0,000 07	−0,000 06	−0,000 03
−0,000 05	−0,000 05	−0,000 027
−0,000 04	−0,000 04	−0,000 021
−0,000 03	−0,000 03	−0,000 017
−0,000 027	−0,000 02	−0,000 013
je × P		

[1] *R. Courant* und *D. Hilbert*. Methoden der mathematischen Physik. 1. Bd., S. 273 u. f., Berlin 1924.

Mit $P=2p_0c$ erhält man für verschiedene Aufstandsverhältnisse $\frac{c}{a}$ die in Abb. 3 dargestellte Kurve, die für $\frac{c}{a}\to 0$ sich asymptotisch der Ordinatenachse nähert. Für praktische Anwendungen ist es wichtig, die Größe des Fehlers zu kennen, der begangen wird, wenn statt der im Punkte $x=\frac{a}{2}$, $y=0$ logarithmisch unendlich großen Einflußordinate der Tafel 1 bzw. 2 die Werte der Abb. 3 eingeschaltet werden. Integriert man (5a), so erhält man das Moment für eine Belastung der Fläche $2c\cdot 2d$ zu

$$M_x=\int_{-d}^{d} m_x\,dy=\frac{2\,p_0a^2}{\pi^3}\sum_m\left[\frac{2}{m^3}\left(1-e^{-a\,d}\right)-\frac{\pi\,d}{m^2a}\,e^{-a\,d}\right]\sin ac\,\sin a\xi\,\sin ax\quad(m=1,2,3,\ldots).\qquad(6)$$

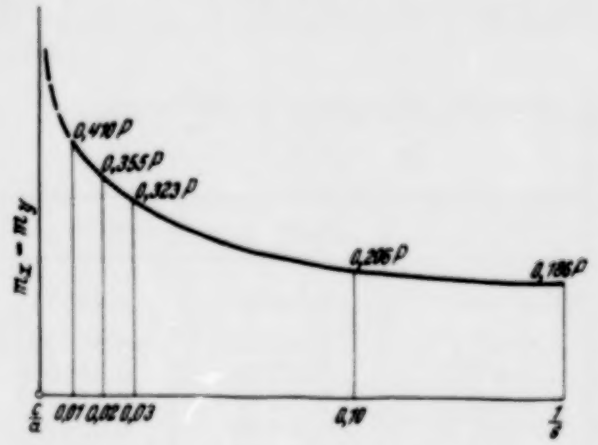

Abb. 3. Momente $m_x=m_y$ in Feldmitte $\left(x=\frac{a}{2}\right)$ für verschiedene Aufstandsverhältnisse $\frac{c}{a}$ der Linienlast p_0.

Mit $P=p_0\cdot 2c\cdot 2d$ sind die sich hieraus ergebenden Momente für $d=\frac{a}{6}$ in der Tafel 3 zusammengestellt.

Tafel 3. *Momente M_x für $d=\pm\frac{a}{6}$.*

$\frac{c}{a}$	Integration	Simpson	Fehler (%)
0,01	0,257 P	0,260 P	1,16
0,02	0,251 „	0,250 „	−0,4
0,03	0,244 „	0,247 „	1,23
$\frac{1}{6}$	0,175 „	0,185 „	5,72

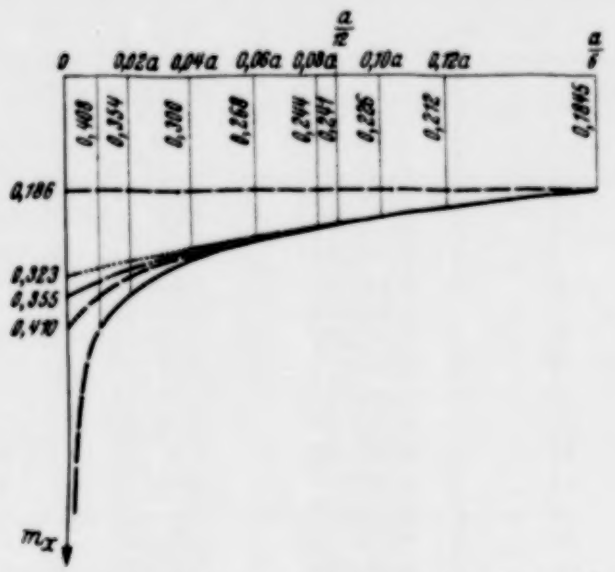

Abb. 4. Reduzierte Momenteneinflußfläche $m_x\left(\xi=\frac{a}{2}, x=\frac{a}{2}\right)$, Schnitt $x=\frac{a}{2}$.

In Abb. 4 ist die eine Hälfte der reduzierten Momenteneinflußfläche m_x dargestellt, die sich aus der asymptotisch verlaufenden Einflußfläche dadurch ergibt, daß im Aufpunkt die Ordinaten der Abb. 3 für die verschiedenen Verhältnisse $\frac{c}{a}$ eingeführt sind. Die gesamten Linien sind spiegelbildlich zur Ordinatenachse $\left(\frac{c}{a}=0\right)$. Die numerische Auswertung der Flächen nach der Simpsonschen Regel für das Intervall von $-\frac{a}{6}$ bis $+\frac{a}{6}$ ist in der dritten Spalte der Tafel 3 angegeben. Der Vergleich der genauen Werte mit denjenigen nach der Simpsonschen Regel unter Einschaltung der Werte für die Linienbelastung im Aufpunkt zeigt, daß selbst für das Intervall $c=d=\pm\frac{a}{6}$ die reduzierte Einflußlinie noch für praktische Bedürfnisse hinreichend genaue Werte liefert. Den Verlauf der Einflußfläche in der x-Richtung (Schnitt $y=0$) zeigt Abb. 5. Die Kurven werden nur bis an die Begrenzung der Linienlast $\left(x=\frac{a}{2}\pm c\right)$ herangeführt. Um den Momentenverlauf im Intervall von $x=\frac{a}{2}\pm c$ bis $x=\frac{a}{2}\pm\frac{a}{6}$ auch für andere Plattenformen (vgl. Abschn. 3 und 4) in einfacher Weise aufzeichnen zu können, kann man, wie folgt, vorgehen. In unmittelbarer Nähe der Einzelkraft überwiegt bei weitem der logarithmische Anteil. Für eine auf dem Umfang $r=d$ freiaufliegende Kreisplatte gilt hierfür[1] der Ausdruck

[1] *A. Nádai*, a. a. O. S. 97.

$$m_x' = -\frac{P}{4\pi} \ln \frac{r}{d} . \tag{7}$$

Man erhält deshalb den Kurvenverlauf an dieser Stelle mit einer allen praktischen Bedürfnissen genügenden Genauigkeit, wenn zu dem im Punkte $x = \frac{a}{2} \pm \frac{a}{6}$ errechneten Momentenwert für die

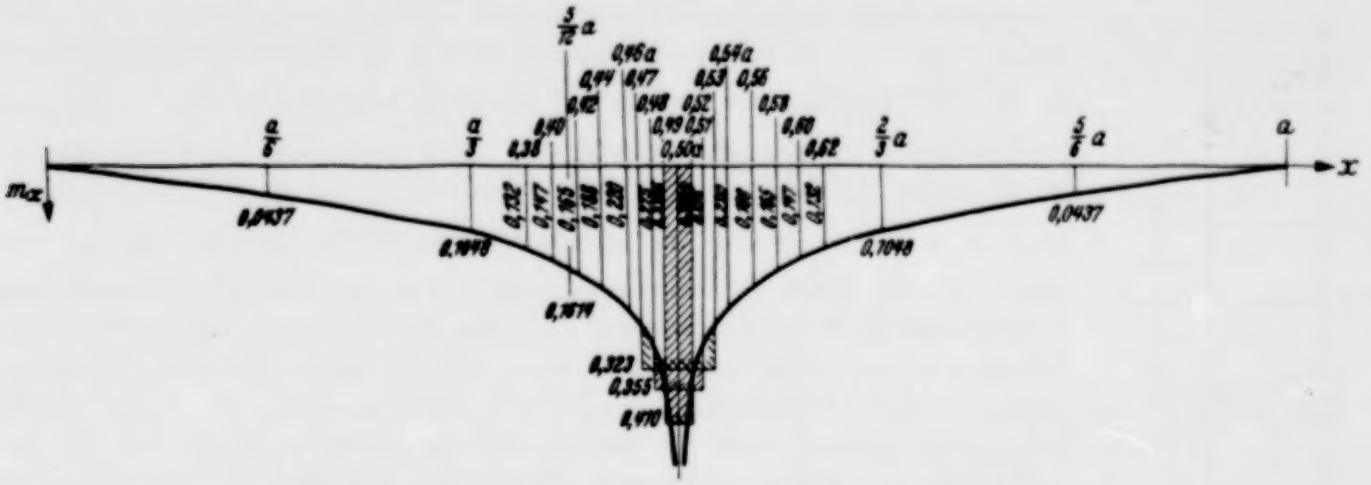

Abb. 5. Reduzierte Momenteneinflußfläche $m_x \left(\xi = \frac{a}{2}, x = \frac{a}{2}\right)$, Schnitt $y = 0$.

betreffende Plattenform (Plattenstreifen, Halbstreifen, Rechteckplatte) weitere Werte nach der Formel (7) hinzugezählt werden. Die Einflußlinie ist dann bis zur Abszisse $x = \frac{a}{2} \pm c$ auszuwerten. Unter der Einzellast kann der Momentenwert aus der Abb. 3 entnommen werden. Für den Plattenstreifen erhält man auf diese Weise mit $d = \frac{a}{6}$ die Zahlenwerte der Tafel 4.

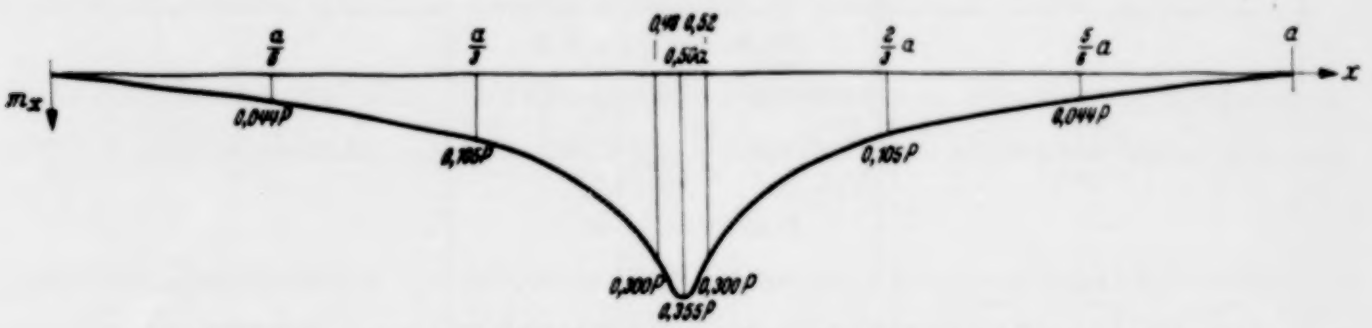

Abb. 6. Momente m_x, Zustandslinie $\left(x = \frac{a}{2}, \xi = \frac{a}{2}, y = 0\right)$ für eine Linienbelastung $P = 2 p_0 c$; $c = 0{,}02\,a$.

Tafel 4.

r =	0,01 a	0,02 a	0,04 a	0,06 a	0,08 a	0,10 a
$\frac{r}{d}$ =	0,06	0,12	0,24	0,36	0,48	0,60
$ln \frac{r}{d}$ =	−2,8134	−2,1203	−1,4271	−1,0217	−0,7340	−0,5109
m_x' =	0,224	0,169	0,114	0,081	0,059	$0{,}041 \times P$
$m_{x,\ \frac{a}{2} \pm \frac{a}{6}}$ =	0,105	0,105	0,105	0,105	0,105	$0{,}105 \times P$
	0,329	0,274	0,219	0,186	0,164	$0{,}146 \times P$
Genauer Wert m_x	0,3305	0,275	0,220	0,188	0,165	$0{,}147 \times P$

In Abb. 6 ist zum Vergleich der Momentenverlauf für die Linienbelastung $p_0 c$ $(c = 0{,}02\,a)$ in Feldmitte $\left(x = \frac{a}{2}\right)$ des Plattenstreifens dargestellt (Zustandslinie).

Abb. 7. Vierseitig aufgelagerte Platte, Bezugssystem x, y.

3. Die vierseitig freiaufliegende Rechteckplatte. Die auf vier Seiten aufgelagerte Platte wird hier unter den Gesichtspunkten behandelt, die für die folgenden Abschnitte von Bedeutung sind. Durch Überlagerung von Plattenstreifen unter Einzelkraftbelastung gemäß Abb. 7 erhält man den Navierschen Biegungsfall einer rechteckigen, vierseitig aufgelagerten Platte[1]. Die unter Benutzung der Zahlenwerte der Tafel 1 und 2 ermittelten Momente stellen nach den Ausführungen unter 2 die Momenteneinflußflächen in Feldmitte $\left(x=\frac{a}{2}\right)$ dar. In einer Entfernung von $3\frac{1}{2}\,a$ in der y-Richtung ist der Einfluß der Einzelkraft bereits so weit abgeklungen, daß eine weitere Ausdehnung der Tafeln 1 und 2 nicht erforderlich ist. Für die Laststellungen in $y=0, \pm\frac{b}{6}, \pm\frac{b}{3}, x=\frac{a}{2}$ der quadratischen Platte sind die Momentenwerte in der Tafel 5 zusammengestellt. Die im Aufpunkt eingeführte Linienlastlänge beträgt hierbei $2c=0{,}04\,a$ als ein bei praktischen Ausführungen gut zutreffender Mittelwert. In Klammern ist das Differenzmoment zum entsprechenden Plattenstreifenmoment $m_x=m_y=0{,}355$ angegeben, so daß auch für andere Aufstandslängen (nach Abb. 3) die entsprechenden Momentenwerte leicht berechnet werden können. Alle Einflußordinaten sind jeweils mit P zu multiplizieren.

Tafel 5. *Momenteneinflußfläche der quadratischen Platte* $(b=a)$.

	Last in $\xi=\frac{a}{2}$					Last in $\xi=\frac{a}{3}$					Last in $\xi=\frac{a}{6}$				
	$-\frac{b}{3}$	$-\frac{b}{6}$	0	$\frac{b}{6}$	$\frac{b}{3}$	$-\frac{b}{3}$	$-\frac{b}{6}$	0	$\frac{b}{6}$	$\frac{b}{3}$	$-\frac{b}{3}$	$-\frac{b}{6}$	0	$\frac{b}{6}$	$\frac{b}{3}$
	Punkt $x=\frac{a}{2}$, $y=0$														
m_x	0,0569	0,1278	0,302 (−0,053)	0,1278	0,0569	0,0396	0,0662	0,0569	0,0662	0,0396	0,0154	0,0203	0,0174	0,0203	0,0154
m_y	0,0174	0,0590	0,3813 (0,0263)	0,0590	0,0174	0,0203	0,0662	0,1278	0,0662	0,0203	0,0152	0,0296	0,0569	0,0296	0,0152
	Punkt $x=\frac{a}{2}$, $y=\frac{b}{6}$														
m_x	0,0351	0,0738	0,1278	0,2850 (−0,070)	0,0924	0,0280	0,0537	0,0662	0,0448	0,0382	0,0138	0,0228	0,0203	0,0098	0,0065
m_y	0,0036	0,0172	0,0590	0,3819 (0,0269)	0,0555	0,0047	0,0206	0,0662	0,1276	0,0615	0,0042	0,0158	0,0296	0,0563	0,0254
	Punkt $x=\frac{a}{2}$, $y=\frac{b}{3}$														
m_x	0,0169	0,0351	0,0569	0,0925	0,2282 (−0,1268)	0,0141	0,0280	0,0396	0,0382	0,0052	0,0075	0,0138	0,0154	0,0065	−0,0055
m_y	0,0002	0,0036	0,0174	0,0555	0,3643 (0,0093)	0,0002	0,0047	0,0203	0,0615	0,1072	0,0006	0,0042	0,0152	0,0254	0,0411

Die Momenteneinflußwerte des Plattenmittelpunktes $\left(x=\frac{a}{2}, y=0\right)$ sind in den Abb. 8 und 8a für verschiedene Seitenverhältnisse $\frac{b}{a}$ der Rechteckplatte für die Laststellungen $\xi=\frac{a}{2}, \frac{a}{3}, \frac{a}{6}$ aufgezeichnet.

Der analytische Ausdruck für die mit einer Einzelkraft belasteten Platte ergibt sich aus der Überlagerung zweier mit je einer Einzelkraftreihe belasteter Plattenstreifen. Die Biegefläche des freiaufliegenden Plattenstreifens mit einer Einzelkraftreihe ist[2]

$$w_1 = \frac{Pa^2}{2\pi^3 N}\sum_m \frac{1}{m^3}\left[(1+\alpha\,b\,\mathfrak{Ctg}\,\alpha\,b)\,\mathfrak{Cof}\,\alpha\,y_1 - \alpha\,y_1\,\mathfrak{Sin}\,\alpha\,y_1\right]\frac{\sin\alpha\,\xi\,\sin\alpha\,x}{\mathfrak{Sin}\,\alpha\,b} \qquad (m=1,2,3,\ldots). \qquad (8)$$

[1] *A. Nádai*, a. a. O. S. 161.
[2] *A. Nádai*, a. a. O. S. 160.

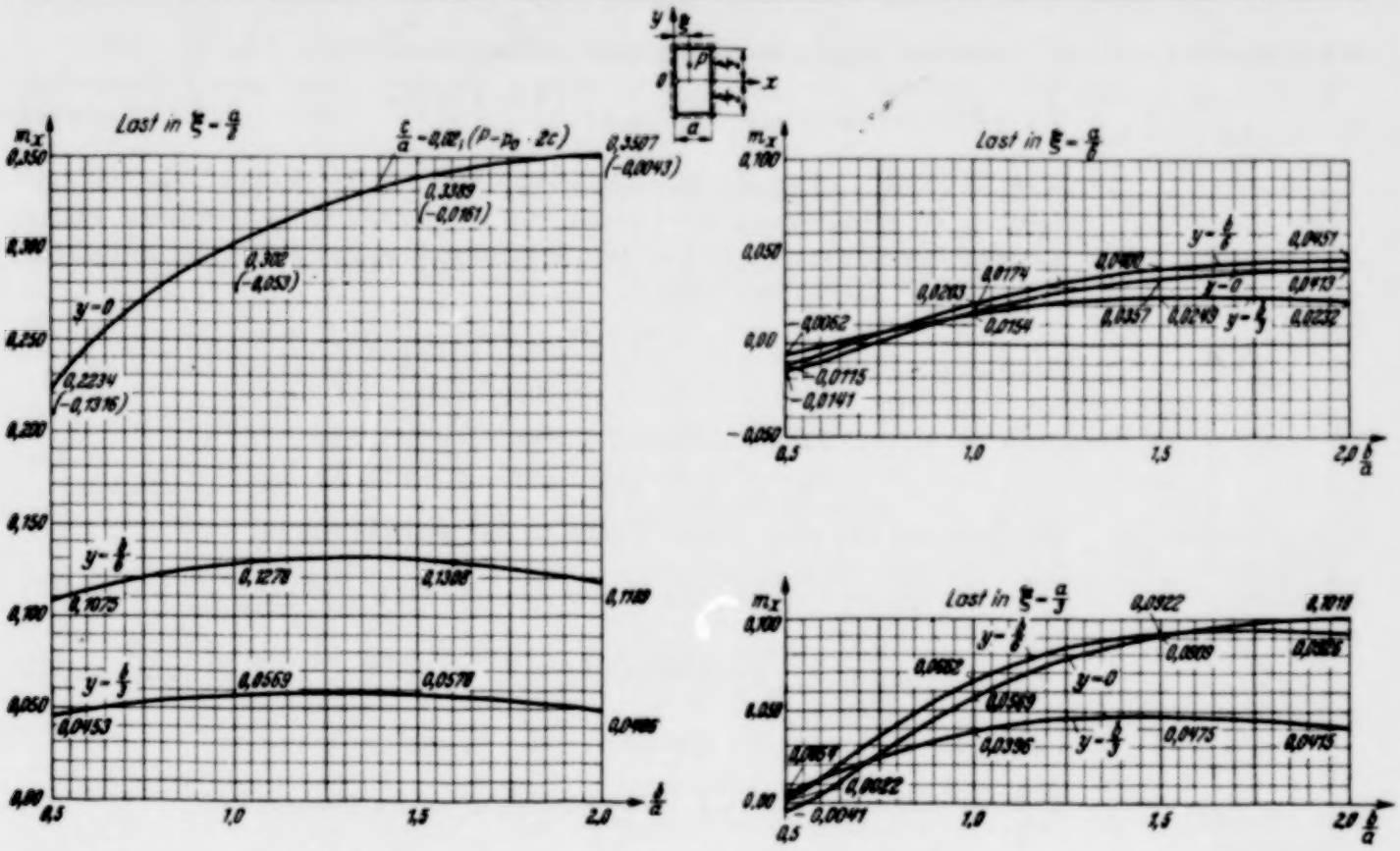

Abb. 8. Momenteneinflußflächen m_x für den Punkt $x = \frac{a}{2}$, $y = 0$.

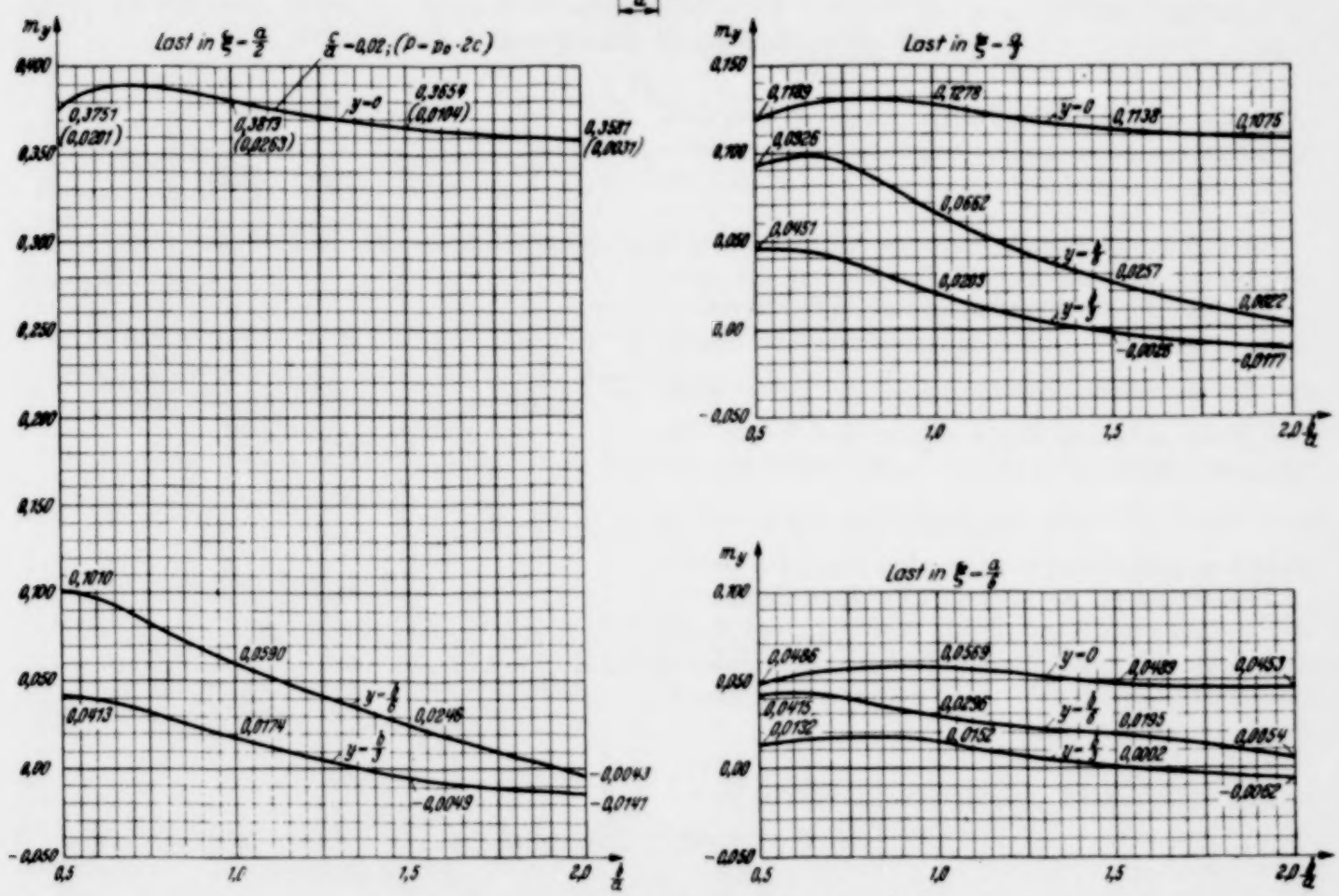

Abb. 8a. Momenteneinflußflächen m_y für den Punkt $x = \frac{a}{2}$, $y = 0$.

Wird hierüber ein um 2η verschobenes zweites Kraftsystem

$$w_2 = -\frac{Pa^2}{2\pi^3 N}\sum_m \frac{1}{m^3}\left[(1+ab\,\mathfrak{Ctg}\,ab)\,\mathfrak{Cof}\,ay_2 - ay_2\,\mathfrak{Sin}\,ay_2\right]\frac{\sin a\xi \sin ax}{\mathfrak{Sin}\,ab} \quad (m=1,2,3,\ldots). \tag{8a}$$

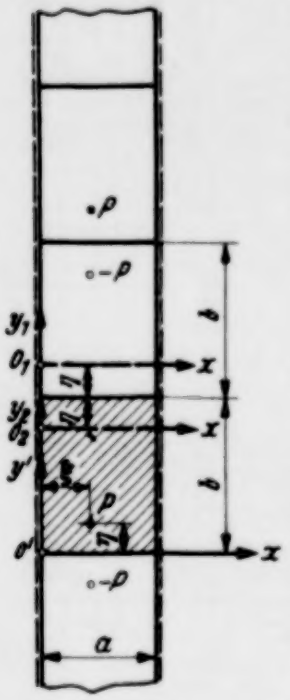

Abb. 7a. Vierseitig aufgelagerte Platte, Bezugssystem x, y'.

gelagert und ein neues Koordinatensystem (x, y') gemäß Abb. 7a eingeführt, so erhält man die Lösung für die vierseitig aufgestützte Platte mit den Seitenlängen a und b, die im Punkte ξ, η des neuen Koordinatensystems eine Einzellast trägt:

$$w_0 = w_1 + w_2. \tag{9}$$

Hierbei ist

$$y_1 = y' - (b+\eta) \quad \text{für } y' \geqq \eta,$$
$$y_1 = y' + (b-\eta) \quad \text{für } y' \leqq \eta,$$
$$y_2 = y' - (b-\eta) \quad \text{für } -\eta \leqq y' \leqq 2b-\eta.$$

Die Neigung der elastischen Fläche in der y-Richtung ist

$$\frac{\partial w_1}{\partial y} = \frac{Pa}{2\pi^2 N}\sum \frac{1}{m^2}\left[ab\,\mathfrak{Ctg}\,ab\,\mathfrak{Sin}\,ay_1 - ay_1\,\mathfrak{Cof}\,ay_1\right]\frac{\sin a\xi \sin ax}{\mathfrak{Sin}\,ab}, \tag{10}$$

$$\frac{\partial w_2}{\partial y} = -\frac{Pa}{2\pi^2 N}\sum \frac{1}{m^2}\left[ab\,\mathfrak{Ctg}\,ab\,\mathfrak{Sin}\,ay_2 - ay_2\,\mathfrak{Cof}\,ay_2\right]\frac{\sin a\xi \sin ax}{\mathfrak{Sin}\,ab}. \tag{11}$$

Längs der Geraden $y'=0$ wird $y_1=(b-\eta)$ und $y_2=-(b-\eta)$,

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial w_0}{\partial y} &= \frac{\partial w_1}{\partial y} + \frac{\partial w_2}{\partial y} = \frac{Pa}{\pi^2 N}\sum \frac{1}{m^2}\,\omega_{0m}\sin a\xi \sin ax \quad (m=1,2,3,\ldots)\\ \text{mit}\quad \omega_{0m} &= \frac{1}{\mathfrak{Sin}\,ab}\left[ab\,\mathfrak{Ctg}\,ab\,\mathfrak{Sin}\,a(b-\eta) - a(b-\eta)\,\mathfrak{Cof}\,a(b-\eta)\right].\end{aligned}\right\} \tag{12a}$$

Längs der Geraden $y'=b$ gilt: $y_1=-\eta$, $y_2=\eta$:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial w_0}{\partial y} &= -\frac{Pa}{\pi^2 N}\sum \frac{1}{m^2}\,\omega_{bm}\sin a\xi \sin ax\\ \text{mit}\quad \omega_{bm} &= \frac{1}{\mathfrak{Sin}\,ab}\left[ab\,\mathfrak{Ctg}\,ab\,\mathfrak{Sin}\,a\eta - a\eta\,\mathfrak{Cof}\,a\eta\right].\end{aligned}\right\} \tag{12b}$$

Aus dem analytischen Ausdruck $w_0 = w_1 + w_2$ sind unmittelbar die Symmetrieeigenschaften der Einflußfunktion ersichtlich.

Als Beispiel für die Anwendung der Tafel 5 sei die Auswertung der Einflußflächen der quadratischen Platte für eine gleichmäßig verteilte Last p gezeigt. Die Flächeninhaltsberechnung für die einzelnen Schnitte $y=\frac{b}{3}$, $\frac{b}{6}$ und 0 nach der Simpsonschen Regel ergibt die Werte der Abb. 9. Hierbei ist an Stelle des Wertes $m_x = 0{,}302\,P$ unter der Linienlast $\left(\frac{c}{a}=0{,}02\right)$, über den nicht integriert werden darf, die Größe $m_x = 0{,}01208\,pa$ zu setzen. Die Zwischenwerte der reduzierten Einflußlinie Abb. 9c sind nach dem unter **2** angegebenen Näherungsverfahren ermittelt. Durch weitere Summierung nach Simpson erhält man

$$m_x = \frac{2}{9}\,a\,(0{,}028289 + 0{,}059528 + 0{,}05213)\,pa$$
$$= 0{,}0374\,pa^2.$$

Die Abweichung gegenüber dem genauen Wert $m_x = 0{,}036845\,pa^2$ beträgt somit nur 1,6 %.

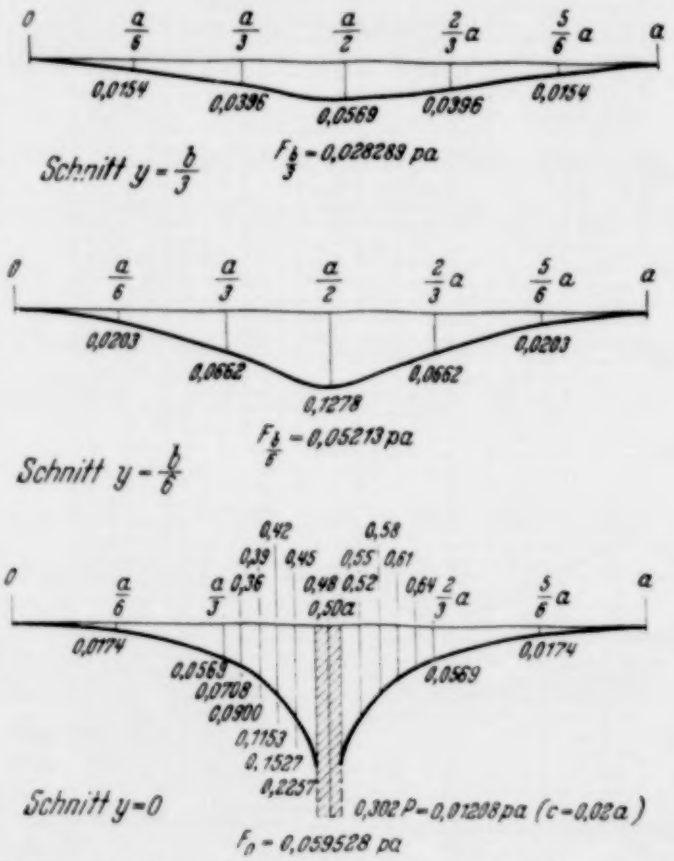

Abb. 9a—c. Momenteneinflußfläche m_x der quadratischen Platte für Feldmitte $\left(x=\frac{a}{2},\ y=0\right)$.

4. Die auf zwei gegenüberliegenden Seiten frei aufgelagerte Platte. Für die vierseitig frei aufliegende Platte erhält man die Auflagerkräfte längs der Kanten $y'=0$ und $y'=b$ nach der Formel

$$q'_y = p'_y + \frac{\partial m'_{xy}}{\partial x} \quad \text{(hierbei ist die Scherkraft } p'_y = -N\frac{\partial \Delta w'}{\partial y}\text{ (Abb. 10),}$$

$$\left.\begin{aligned} q'_{y_1} &= \frac{P}{2a}\sum_m \left[(\alpha b \operatorname{Ctg} \alpha b + 2)\operatorname{Sin}\alpha y_1 - \alpha y_1 \operatorname{Cof}\alpha y_1\right]\frac{\sin\alpha\xi\sin\alpha x}{\operatorname{Sin}\alpha b} \quad (m=1,2,3,\ldots),\\ q'_{y_2} &= -\frac{P}{2a}\sum_m \left[(\alpha b \operatorname{Ctg} \alpha b + 2)\operatorname{Sin}\alpha y_2 - \alpha y_2 \operatorname{Cof}\alpha y_2\right]\frac{\sin\alpha\xi\sin\alpha x}{\operatorname{Sin}\alpha b}. \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

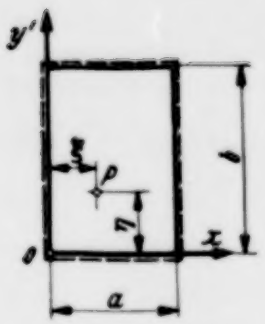

Abb. 10. Vierseitig aufgelagerte Platte.

Längs der Seite $y'=0$ ergibt sich die gesamte Stützkraft zu

$$\left.\begin{aligned} q'_{y,0} &= \frac{P}{a}\sum_m Z_{0,m}\sin\alpha\xi\,\sin\alpha x,\\ \text{mit}\quad Z_{0m} &= \frac{(2+\alpha b\operatorname{Ctg}\alpha b)\operatorname{Sin}\alpha(b-\eta) - \alpha(b-\eta)\operatorname{Cof}\alpha(b-\eta)}{\operatorname{Sin}\alpha b}. \end{aligned}\right\} \quad (14a)$$

Längs der Seite $y'=b$ gilt

$$\left.\begin{aligned} q'_{y,b} &= -\frac{P}{a}\sum_m Z_{I,m}\sin\alpha\xi\,\sin\alpha x\\ \text{mit}\quad Z_{I,m} &= \frac{(2+\alpha b\operatorname{Ctg}\alpha b)\operatorname{Sin}\alpha\eta - \alpha\eta\operatorname{Cof}\alpha\eta}{\operatorname{Sin}\alpha b}. \end{aligned}\right\} \quad (14b)$$

Diese Auflagerkräfte sind nun längs der Ränder $y'=0$, $y'=b$ der zweiseitig gestützten Platte anzubringen, um durch Überlagerung mit den nach Abschnitt 3 errechneten Momentenwerten die allgemeine Lösung für die zweiseitig aufliegende Platte zu erhalten. Für die numerische Ermittlung der Spannungsgrößen und Durchbiegungen ist es zweckmäßig, die an den freien Plattenrändern angreifenden Lasten in einen symmetrischen und einen antisymmetrischen Anteil zu zerlegen. Wird der Koordinatenursprung wieder in die Mitte der Seite b gelegt, so beträgt der symmetrische Lastanteil (Abb. 11)

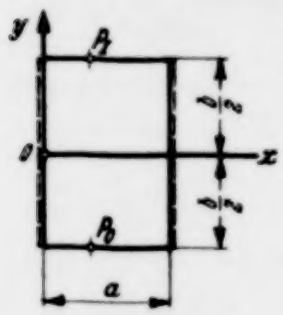

Abb. 11. Zweiseitig aufgelagerte Platte.

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{P_0+P_I}{2} = \frac{P}{a}\sum_m X_m\sin\alpha\xi\,\sin\alpha x\\ \text{mit}\quad X_m &= \frac{Z_{0,m}+Z_{I,m}}{2}. \end{aligned}\right\} \quad (15a)$$

Für den antisymmetrischen Anteil erhält man entsprechend

$$\left.\begin{aligned} Y &= \frac{P_0-P_I}{2} = \frac{P}{a}\sum_m Y_m\sin\alpha\xi\,\sin\alpha x\\ \text{mit}\quad Y_m &= \frac{Z_{0,m}-Z_{I,m}}{2}. \end{aligned}\right\} \quad (16a)$$

1. Symmetrische Belastung. Der allgemeine Ansatz im Falle der Symmetrie lautet

$$w = \frac{Pa^2}{\pi^3 N}\sum\frac{1}{m^3}\left[A_m\operatorname{Cof}\alpha y + B_m\alpha y\operatorname{Sin}\alpha y\right]\sin\alpha\xi\sin\alpha x.$$

Aus den Randbedingungen

$$m_y = 0 \text{ für } y=\frac{b}{2} \text{ und } q_y = \frac{P}{a}\sum_m X_m\sin\alpha\xi\sin\alpha x \text{ für } y=\frac{b}{2}$$

erhält man die Beiwerte

$$\left.\begin{aligned} A_m &= -B_m\left(2+\alpha\frac{b}{2}\operatorname{Tg}\alpha\frac{b}{2}\right),\\ B_m &= -\frac{X_m}{3\operatorname{Sin}\alpha\frac{b}{2} - \frac{\alpha\frac{b}{2}}{\operatorname{Cof}\frac{b}{2}}}. \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

Die Biegemomente sind dann

$$\left.\begin{aligned} m_x &= \frac{P}{\pi}\sum_m \frac{1}{m}\Big[A_m \operatorname{Cof} a y + B_m a y \operatorname{Sin} a y\Big]\sin a\xi \sin a x, \\ m_y &= \frac{P}{\pi}\sum_m \frac{1}{m}\Big[A_m \operatorname{Cof} a y + B_m (a y \operatorname{Sin} a y + 2\operatorname{Cof} a y)\Big]\sin a\xi \sin a x. \end{aligned}\right\} \tag{17a}$$

2. Antisymmetrische Belastung. Mit dem Ansatz

$$w = \frac{P a^2}{\pi^3 N}\sum_m \frac{1}{m^3}\Big[C_m \operatorname{Sin} a y + D_m a y \operatorname{Cof} a y\Big]\sin a\xi \sin a x$$

erhält man aus den obigen Randbedingungen

$$\left.\begin{aligned} C_m &= -D_m\left(2 + a\frac{b}{2}\operatorname{Cotg} a\frac{b}{2}\right), \\ D_m &= -\frac{Y_m}{3\operatorname{Cof} a\frac{b}{2} + \frac{a\frac{b}{2}}{\operatorname{Sin} a\frac{b}{2}}} \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

und die Biegemomente

Abb. 12. Randbelastung der zweiseitig aufgelagerten Platte.

$$\left.\begin{aligned} m_x &= \frac{P}{\pi}\sum_m \Big[C_m \operatorname{Sin} a y + D_m a y \operatorname{Sin} a y\Big]\sin a\xi \sin a x, \\ m_y &= \frac{P}{\pi}\sum_m \Big[C_m \operatorname{Sin} a y + D_m (a y \operatorname{Cof} a y + 2\operatorname{Sin} a y)\Big]\sin a\xi \sin a x. \end{aligned}\right\} \tag{18a}$$

Für die Belastung des Plattenrandes durch eine Linienbelastung (Abb. 12) p_0 auf der Strecke $2c$ gilt[1] unter der Linienlast

$$\left.\begin{aligned} w = \frac{4 p_0 a^3}{\pi^4 N}\sum \frac{\sin a c}{m^4}\Big[&a_m \operatorname{Cof} a y' + b_m \operatorname{Sin} a y' + c_m a y' \operatorname{Cof} a y' + \\ &+ d_m a y' \operatorname{Sin} a y'\Big]\sin a\xi \sin a x \ (m = 1, 2, 3, \ldots). \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Hierbei ist zu setzen:

$$P = 2 p_0 c.$$

Die Beiwerte sind dann

$$\left.\begin{aligned} c_m &= \frac{3}{9 - (a b \operatorname{Ctg} a b)^2 + (a b)^2} &&= \tfrac{1}{4}, \\ d_m &= -c_m\left[\frac{a b}{3}\operatorname{Ctg}^2 a b + \operatorname{Ctg} a b - \frac{a b}{3}\right] &&= -\tfrac{1}{3}, \\ b_m &= -c_m (2 + a b \operatorname{Ctg} a b) - a b d_m &&= -\tfrac{2}{3}, \\ a_m &= -2 d_m &&= \tfrac{2}{3}. \end{aligned}\right\} \quad \text{für } \operatorname{Tg} a b \approx \operatorname{Ctg} a b \approx 1. \tag{20}$$

Für die übrigen Plattenpunkte erhält man mit $\lim\limits_{c\to 0}\frac{\sin a c}{a c} = 1$

$$w = \frac{2 P a^2}{\pi^3 N}\sum_m \frac{1}{m^3}\Big[a_m \operatorname{Cof} a y' + b_m \operatorname{Sin} a y' + c_m a y' \operatorname{Cof} a y' + d_m a y' \operatorname{Sin} a y'\Big]\sin a\xi \sin a x. \tag{19a}$$

In der Tafel 6 sind die Momentenwerte in Feldmitte $\left(x = \xi = \frac{a}{2},\ y' = 0\right)$ des Plattenrandes für verschiedene Werte $\frac{c}{a}$ und Seitenverhältnisse $\frac{b}{a}$ angegeben. Die Momenteneinflußflächen m_x und m_y der quadratischen Platte für Feldmitte in den Punkten $y = 0$, $\frac{b}{6}$, $\frac{b}{3}$ und $\frac{b}{2}$ können der Tafel 7 entnommen werden. Das Moment unter der Einzellast ist hierbei für ein Linienlastlängenverhältnis $\frac{c}{a} = 0{,}02$ ermittelt. Die in Klammern beigefügten Zahlen ergeben sich nach Subtraktion des Momentenwertes des Plattenstreifens ($m_x = m_y = 0{,}355$).

[1] Vgl. *R. Ohlig*, Bauing. 19 (1938) S. 457.

Tafel 6. *Momentenwerte des Plattenrandes. Momente* $m_x\left(\frac{a}{2}, 0\right)$

$\frac{c}{a}$ \ $\frac{b}{a}$ =	0,5	1,0	1,5	2,0
0,01	1,202	1,102	1,094	1,093 · P
0,02	1,054	0,955	0,947	0,946 · P
0,03	0,968	0,869	0,861	0,860 · P

Tafel 7. *Momenteneinflußflächen der quadratischen Platte.*

Last in:	m_x $\xi = \frac{a}{2}$	m_x $\xi = \frac{a}{3}$	m_x $\xi = \frac{a}{6}$	m_y $\xi = \frac{a}{2}$	m_y $\xi = \frac{a}{3}$	m_y $\xi = \frac{a}{6}$
Punkt $x = \frac{a}{2}$, $y = 0$						
y = 0	0,4219 (+0,0669)	0,1605	0,0769	0,331 (−0,024)	0,0844	0,0320
$\pm \frac{b}{6}$	0,2548	0,1757	0,0830	0,0057	0,0204	0,0035
$\pm \frac{b}{3}$	0,2044	0,166	0,0868	−0,0448	−0,0326	−0,0142
$\pm \frac{b}{2}$	0,1787	0,151	0,0830	−0,076	−0,0632	−0,0335
Punkt $x = \frac{a}{2}$, $y = \frac{b}{6}$						
y = $-\frac{b}{2}$	0,1297	0,1051	0,0632	−0,0573	−0,0489	−0,0274
$-\frac{b}{3}$	0,1539	0,1305	0,0725	−0,0457	−0,0377	−0,0200
$-\frac{b}{6}$	0,1903	0,1544	0,0810	−0,0287	−0,0190	−0,0069
0	0,2548	0,1757	0,0830	0,0115	0,0254	0,0063
$\frac{b}{6}$	0,4378 (0,0828)	0,1755	0,0833	0,3269 (0,0281)	0,0810	0,0305
$\frac{b}{3}$	0,2885	0,2025	0,0958	−0,0143	0,0045	−0,0041
$\frac{b}{2}$	0,2576	0,1999	0,1052	−0,0929	−0,0698	−0,0320
Punkt $x = \frac{a}{2}$, $y = \frac{b}{3}$						
y = $-\frac{b}{2}$	0,098	0,0848	0,0488	−0,0325	−0,0281	−0,0162
$-\frac{b}{3}$	0,1211	0,1042	0,0593	−0,0310	−0,0263	0,0153
$-\frac{b}{6}$	0,1539	0,1304	0,0726	−0,0276	−0,0222	0,0185
0	0,2044	0,166	0,0914	−0,018	−0,0097	−0,0014
$\frac{b}{6}$	0,2887	0,2024	0,0959	0,0105	0,0251	0,0068
$\frac{b}{3}$	0,5023 (0,1473)	0,221	0,1023	0,3003 (−0,0547)	0,062	0,0213
$\frac{b}{2}$	0,4009	0,2682	0,1206	−0,1041	0,0503	0,0159
Punkt $x = \frac{a}{2}$, $y = \frac{b}{2}$						
y = $-\frac{b}{2}$	0,0758	0,0656	0,0379			
$-\frac{b}{3}$	0,098	0,0848	0,0488			
$-\frac{b}{6}$	0,1297	0,1114	0,0632			
0	0,1787	0,151	0,0829			
$\frac{b}{6}$	0,2576	0,2063	0,1052			
$\frac{b}{3}$	0,4009	0,2682	0,1206			
$\frac{b}{2}$	0,955 ($\frac{c}{a}$ = 0,02) (1,102: $\frac{c}{a}$ = 0,01) (0,869: $\frac{c}{a}$ = 0,03)	0,2866	0,1248			

Für andere Lastverteilungslängen kann der betreffende Wert der Grundlösung aus Abb. 3 entnommen und zum Klammerwert hinzugezählt werden, um den gewünschten Einflußwert zu erhalten.

Während durch die Überlagerung der Auflagerkräfte die Symmetrieeigenschaft in der x-Richtung erhalten bleibt, geht sie in der y-Richtung hierbei verloren. Die Momenteneinflußflächen m_y sind aus den Zustandsflächen ermittelt.

5. Eingespannte Plattenränder. Aus den Lösungen w_0 der Abschnitte 3 und 4 lassen sich durch Summationsprozesse auf Grund ihrer fundamentalen Superpositionseigenschaft weitere Lösungen w' der homogenen Differentialgleichung gewinnen, die am eingespannten Rand der Bedingung

$$\frac{\partial w'}{\partial n} = -\frac{\partial w_0}{\partial n}$$

genügen müssen. Die Lösung gestaltet sich besonders einfach in den Fällen, daß nur ein Rand oder zwei gegenüberliegende Kanten eingespannt sind, während die übrigen Seiten den Navierschen Randbedingungen genügen.

1. Die einseitig eingespannte Platte (Abb. 13). Die Koeffizienten des allgemeinen Lösungsansatzes

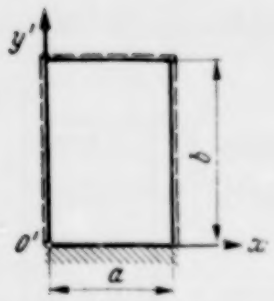

Abb. 13. Einseitig eingespannte Platte.

$$w' = \frac{Pa^2}{\pi^3 N}\sum_m \frac{1}{m^3}\Big[A_m \mathfrak{Cof}\,a\,y' + B_m \mathfrak{Sin}\,a\,y' + C_m\, a\,y' \mathfrak{Cof}\,a\,y' + D_m\, a\,y' \mathfrak{Sin}\,a\,y'\Big]\sin a\,\xi \sin a\,x \qquad (20)$$

sind für die Randbedingungen

$$w' = 0,\ \frac{\partial w'}{\partial y} = -\frac{\partial w_0}{\partial y} \text{ für } y' = 0$$

und

$$w' = 0,\quad m_y = -\frac{N\,\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{für } y' = b$$

zu bestimmen.

Unter Benutzung der Gleichung (12a) erhält man die Beiwerte

$$\left.\begin{aligned} A_m &= 0,\\ C_m &= -\frac{\omega_{0m}}{1 + ab\,\mathfrak{Tg}\,ab - ab\,\mathfrak{Ctg}\,ab},\\ B_m &= -C_m - \omega_{0m},\\ D_m &= -C_m\,\mathfrak{Tg}\,ab. \end{aligned}\right\} \qquad (20a)$$

2. Die auf zwei gegenüberliegenden Seiten eingespannte Platte[1]. Der allgemeine Lösungsansatz

$$w' = \frac{Pa^2}{\pi^3 N}\sum \frac{1}{m^3}\Big[\mathfrak{A}_m \mathfrak{Cof}\,a\,y' + \mathfrak{B}_m \mathfrak{Sin}\,a\,y' + \mathfrak{C}_m\, a\,y' \mathfrak{Cof}\,a\,y' + \mathfrak{D}_m\, a\,y' \mathfrak{Sin}\,a\,y'\Big]\sin a\,\xi \sin a\,x \qquad (21)$$

muß den Randbedingungen genügen:

$$w' = 0 \text{ und } \frac{\partial w'}{\partial y} = -\frac{\partial w_0}{\partial y} \text{ längs der Kanten } y' = 0 \text{ und } y' = b.$$

Mit den Werten der Gleichungen (12a) und (12b) ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{C}_m &= -\frac{\omega_{0m}\,\mathfrak{Sin}\,ab - \omega_{bm}\,ab}{\mathfrak{Sin}\,ab - \dfrac{(ab)^2}{\mathfrak{Sin}\,ab}},\\ \mathfrak{B}_m &= -\mathfrak{C}_m - \omega_{0m},\\ \mathfrak{A}_m &= 0,\\ \mathfrak{D}_m &= -\frac{\mathfrak{B}_m}{ab} - \mathfrak{C}_m\,\mathfrak{Ctg}\,ab. \end{aligned}\right\} \qquad (21a)$$

[1] Mit diesem Belastungsfall beschäftigt sich ausführlich *A. Pucher*, Ing.-Arch. 14 (1943) S. 246.

Die Gleichungen (20) und (21) sind der Lösung (9) zu überlagern, um die allgemeinen Werte der einzelkraftbelasteten Platte im Falle 5 1) und 2) zu erhalten.

3. Die vierseitig eingespannte Platte. In diesem und dem folgenden Fall soll die Differenzenrechnung[1] unter gewissen Modifikationen herangezogen werden. Zu diesem Zweck wird die Mittelebene der Platte in ein Netz sich rechtwinklig kreuzender Geraden geteilt. Ihr Abstand sei gleichgroß ($\Delta x = \Delta y = s$). Die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\,\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\,\partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{N}$$

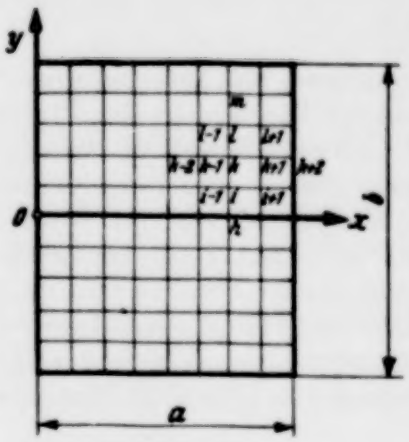

Abb. 14. Rechteckiges Gewebe.

geht dann in die dreizehngliedrige Formel

$$20\,w_k - 8\,(w_{k-1} + w_l + w_{k+1} + w_i) + 2\,(w_{i-1} + w_{l-1} + w_{l+1} + w_{i+1}) + (w_{k-2} + w_m + w_{k+2} + w_h) = \frac{p_k\,s^4}{N} \qquad (22)$$

über; w_k sind hierbei die Ordinaten der Biegefläche. Mit Einführung des Begriffs der Momentensumme $M_k = \frac{m_{x,k} + m_{y,k}}{1+\nu}$ spaltet sich die Differentialgleichung vierter Ordnung in die beiden Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial y^2} = -\,p\,, \qquad (23a)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\,\frac{M}{N}\,, \qquad (23b)$$

denen die Differenzengleichungen

$$4\,M_k - M_{k-1} - M_l - M_{k+1} - M_i = p_k\,s^2, \qquad (24a)$$

$$4\,w_k - w_{k-1} - w_l - w_{k+1} - w_i = \frac{M_k\,s^2}{N} \qquad (24b)$$

entsprechen.

Die Genauigkeit, mit der das Netz sich an die elastische Fläche der Platte angleicht, wächst mit Verkleinerung der Teilung Δx, Δy des Gitters. Damit steigt aber auch der Umfang der Zahlenrechnung zur Lösung der linearen Gleichungen. Während nach *Marcus* bei der freigelagerten Platte bei gleichförmig verteilter Belastung eine Aufteilung in 16 Maschen genügt, um die Momente mit einer Abweichung von rd. 4,5 % von den genauen Werten zu erhalten[2], beträgt der Fehler bei der eingespannten Platte mit einer Einteilung in 64 Maschen rd. 8 %[3]. Für Einzelkraftbelastung schlägt *Marcus* ein Grundnetz von 64 Maschen vor und fügt in dieses ein engmaschiges Gitter ein. Eine wesentliche Genauigkeitssteigerung läßt sich erreichen, wenn als Grundlösung zunächst die freiaufliegende Platte gewählt wird. Die Neigungswinkel der elastischen Fläche der Plattenränder können für alle Belastungsfälle der Einzelkraft aus den Gleichungen (9) bzw. (10) und (11) mit beliebiger Genauigkeit ermittelt werden. Für gleichmäßig verteilte Belastung stehen ebenfalls rasch konvergierende Reihen zur Verfügung[4]. Die Zusatzlösungen müssen dann die homogene Differentialgleichung $\Delta\Delta w' = 0$ bzw. die ihr entsprechenden Gleichungen

$$\frac{\Delta^2 M'_k}{\Delta x^2} + \frac{\Delta^2 M'_k}{\Delta y^2} = 0, \qquad (25a)$$

$$\frac{\Delta^2 w'_k}{\Delta x^2} + \frac{\Delta^2 w'_k}{\Delta y^2} = -\,\frac{M'_k}{N} \qquad (25b)$$

---

[1] *H. Marcus*, Die Theorie elastischer Gewebe und ihre Anwendung auf die Berechnung biegsamer Platten. 2. Aufl., Berlin 1932. — *K. Beyer*, Die Statik im Eisenbetonbau. 2. Bd. S. 680 u. f. 2. Aufl., Berlin 1934.

[2] *H. Marcus*, a. a. O. S. 50.

[3] *H. Marcus*, a. a. O. S. 154.

[4] *A. Nádai*, a. a. O. S. 120.

mit den Randbedingungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial w'}{\partial x} &= -\frac{\partial w_0}{\partial x} \text{ längs der Kanten } x = 0 \text{ bzw. } a, \\ \frac{\partial w'}{\partial y} &= -\frac{\partial w_0}{\partial y} \text{ längs der Seite } y' = 0 \text{ und } b \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

erfüllen. Die Ordinaten w'_k sind beim Differenzenverfahren als einzelne Funktionswerte in den Gitterpunkten gegeben. An Stelle des Differentialquotienten tritt der Differenzenquotient

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_k \rightarrow \frac{w_{k+1} - w_{k-1}}{2\,\Delta x}, \qquad \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_k \rightarrow \frac{w_l - w_i}{2\,\Delta y}.$$

Der Genauigkeitsgrad läßt sich noch verbessern, wenn zu dessen Ermittlung das Interpolationsverfahren[1] angewendet wird. Die Vielecke, in die die stetig gekrümmten Biegelinien der Platte für die einzelnen Schnitte x=konst. bzw. y=konst. bei der Differenzenrechnung übergehen, werden hierbei durch Parabeln entsprechend hoher Ordnung ersetzt. Damit sind die Bestimmungsgleichungen für die Werte w' unempfindlicher bezüglich der Maschenteilung des Gitters geworden. Da die Werte $\partial w_0/\partial x$ bzw. $\partial w_0/\partial y$ der freiaufliegenden Platte aus Reihenentwicklungen, mittels Greenscher Funktionen und konformer Abbildung mit großer Schärfe ermittelt werden können, ist somit eine Verbesserung der Leistungsfähigkeit des Differenzenverfahrens zu erwarten. Wie am nachfolgenden Beispiel der eingespannten quadratischen Platte gezeigt wird, gelingt mit diesem Verfahren eine Verringerung der Netzeinteilung von 64 auf 36 Maschen bei der gleichen Abweichung von 8 % von den genauen Werten.

Die Biegungs- und Drillungsmomente ergeben sich beim Differenzenverfahren für $\nu = 0$ nach den Gleichungen

$$m_{x,k} = \frac{N}{s^2}\left(-w_{k-1} + 2\,w_k - w_{k+1}\right), \tag{27a}$$

$$m_{y,k} = \frac{N}{s^2}\left(-w_i + 2\,w_k - w_l\right), \tag{27b}$$

$$m_{xy,k} = \frac{N}{s^2}\left(w_{l-1} - w_{l+1} - w_{i-1} + w_{i+1}\right). \tag{27c}$$

Für die Berechnung der Einspannmomente längs der Auflagerkante der Platte muß bei Verwendung der dreizehngliedrigen Gleichungen (22) das Gitter über den Plattenrand hinaus fortgesetzt werden. Die Genauigkeit des Ergebnisses ist damit wieder in hohem Maße von der Maschenteilung abhängig, da ja im Bereich des Plattenrands die Wendepunkte der elastischen Fläche liegen. Bei großer Maschenteilung ist es deshalb erforderlich, an Stelle der Gleichungen (22) die fünfgliedrigen Gleichungsgruppen (24a) und (24b) für die Momentensumme und die Durchbiegungen zu verwenden. Dann ergeben sich die Einspannmomente unmittelbar aus (24a).

a) Interpolationsformeln. Zur Berechnung von Funktionswerten in der Nähe des Anfangspunktes wird zweckmäßig die Newtonsche Interpolationsformel[2] verwendet. Einer Anzahl von Argumenten x_0, $x_1 = x_0 + s$, $x_2 = x_0 + 2s \ldots x_n = x_0 + ns$ seien die äquidistanten Funktionswerte $w'_0 \ldots . w'_n$ zugeordnet. Für das Gebiet $x_0 \leqq x \leqq x_0 + ns$ gilt mit $t = \frac{x - x_0}{s}$ und $n = 6$ die Interpolationsformel

$$N(t) = w'_0 + \binom{t}{1}\,\Delta^1_{\frac{1}{2}} + \binom{t}{2}\,\Delta^2_1 + \binom{t}{3}\,\Delta^3_{\frac{3}{2}} + \binom{t}{4}\,\Delta^4_2 + \binom{t}{5}\,\Delta^5_{\frac{5}{2}} + \binom{t}{6}\,\Delta^6_3$$

mit $\Delta'_{\frac{1}{2}} = w'_1 - w'_0$; $\Delta^2_1 = w'_2 - 2\,w'_1 + w'_0$; $\Delta^3_{\frac{3}{2}} = w'_3 - 3\,w'_2 + 3\,w'_1 - w'_0$ usw.

---

[1] Mit interpolatorischen Verfahren in Anwendung auf die Differenzenrechnung befaßt sich *H. Hencky*, Z. angew. Math. Mech. 2 (1922) S. 58, sowie *A. Koch*, Die Berechnung biegsamer, unsymmetrisch eingeklemmter und belasteter Platten mit Hilfe der „Theorie elastischer Gewebe mit interpolierten Randordinaten". Diss. Aachen 1929. Von durchgreifender Wirkung ist das Interpolationsverfahren erst dann, wenn in Verbindung mit seiner Anwendung die durch die Belastungen bestimmten konstanten Glieder der linearen Gleichungen – im obigen Falle die Werte $\frac{\partial w_0}{\partial n}$ — im allgemeinen aus strengen Lösungen bestimmt werden können.

[2] *Fr. A. Willers*, Methoden der praktischen Analysis, S. 75. Berlin und Leipzig 1928.

Den Neigungswinkel der Kurve im Punkte $t=0$ (Anfangspunkt) erhält man zu

$$\frac{d\,N(0)}{d\,t} = \Delta^1{}_{\frac{1}{2}} - \tfrac{1}{2}\,\Delta^2{}_1 + \tfrac{1}{3}\,\Delta^3{}_{\frac{3}{2}} - \tfrac{1}{4}\,\Delta^4{}_2 + \tfrac{1}{5}\,\Delta^5{}_{\frac{5}{2}} - \tfrac{1}{6}\,\Delta^6{}_3\,. \tag{28}$$

Für $w_0'=w_6'=0$ wird

$$\frac{d\,N(0)}{d\,t} = 6\,w'_1 - \tfrac{15}{2}\,w'_2 + \tfrac{20}{3}\,w'_3 - \tfrac{15}{4}\,w'_4 + \tfrac{6}{5}\,w'_5 \tag{28a}$$

und bei Symmetrie mit $w_1'=w_5'$, $w_2'=w_4'$

$$\frac{d\,N(0)}{d\,t} = \tfrac{36}{5}\,w'_1 - \tfrac{45}{4}\,w'_2 + \tfrac{20}{3}\,w'_3\,. \tag{28b}$$

Damit erhält man den Neigungswinkel

$$\left(\frac{\partial\,w'}{\partial\,x}\right)_{x=0} = \frac{6}{a}\left(\tfrac{36}{5}\,w'_1 - \tfrac{45}{4}\,w'_2 + \tfrac{20}{3}\,w'_3\right). \tag{29}$$

Für die Ermittlung der Momente in Feldmitte wird an Stelle der Gleichungen (27a) und (27b) zur Erzielung einer größeren Genauigkeit die Stirlingsche Interpolationsformel[1] benutzt. Ihre zweite Ableitung lautet bei äquidistanten Funktionswerten w' für das Gebiet $x_0 \leqq x \leqq x_0+6s$ und $w_0'=w_6'=0$:

$$\left.\begin{aligned} S''(x_3) = \frac{1}{s^2}\Big[w'_2 - 2\,w'_3 + w'_4 - \frac{1}{12}\left(w'_1 - 4\,w'_2 + 6\,w'_3 - 4\,w'_4 + w'_5\right) + \\ + \frac{1}{90}\left(-6\,w'_1 + 15\,w'_2 - 20\,w'_3 + 15\,w'_4 - 6\,w'_5\right)\Big]. \end{aligned}\right\} \tag{30a}$$

Bei Symmetrie gilt

$$S''(x_3) = \frac{2}{s^2}\Big[w'_2 - w'_3 - \frac{1}{12}\left(w'_1 - 4\,w'_2 + 3\,w'_3\right) + \frac{1}{90}\left(-6\,w'_1 + 15\,w'_2 - 10\,w'_3\right)\Big]. \tag{30b}$$

Für $w_0' = w_6' \neq 0$ ist der Ausdruck in der letzten Klammer um den Wert w_0' zu erweitern (30c). Analog gebaute Formeln gelten in der y-Richtung.

Zur Ermittlung des Drillungsmoments kann man die entsprechenden Interpolationsformeln für die Funktion zweier Variablen[2] benutzen, worauf hier nicht weiter eingegangen werden soll.

b) Die quadratische, ringsum eingespannte Platte. Das Verfahren soll auf die quadratische, ringsum eingeklemmte Platte unter gleichförmig verteilter Last angewendet werden. Für diesen Belastungsfall kann eine Reihe von strengen Lösungen zum Vergleich herangezogen werden. Der Neigungswinkel der elastischen Fläche der freiaufliegenden Platte ist

$$\frac{\partial\,w_0}{\partial\,x} = \frac{4\,p_0\,a^3}{\pi^4\,N}\sum\frac{1}{m^5}\left\{1 - \frac{\mathfrak{Cof}\,a\,y\left(\frac{m\,\pi}{2}\,\mathfrak{Sin}\,\frac{m\,\pi}{2} + 2\,\mathfrak{Cof}\,\frac{m\,\pi}{2}\right) - a\,y\,\mathfrak{Sin}\,a\,y\,\mathfrak{Cof}\,\frac{m\,\pi}{2}}{1+\mathfrak{Cof}\,m\,\pi}\right\}\cos a\,x$$

$$(m = 1, 3, 5, \ldots).$$

Damit ergeben sich die Werte

$$\left(\frac{\partial\,w_0}{\partial\,x}\right)_I = 0{,}01347\,\frac{p a^3}{N}\,, \quad \left(\frac{\partial\,w_0}{\partial\,x}\right)_{II} = 0{,}01184\,\frac{p a^3}{N}\,, \quad \left(\frac{\partial\,w_0}{\partial\,x}\right)_{III} = 0{,}00710\,\frac{p a^3}{N}\,.$$

Die Differenzengleichungen (25a) ergeben das Schema Tafel 8.

---

[1] *Fr. A. Willers*, a. a. O. S. 78 und 88.

[2] *Fr. A. Willers*, a. a. O. S. 99.

Tafel 8.

M'_1	M'_2	M'_3	M'_4	M'_5	M'_7	$M'_{I,II\ldots}$	
4	−1		−2			M'_I	=0
−1	4	−1		−2			=0
	−4	4					=0
−1			4	−1	−1	M'_{II}	=0
	−2		−2	4			=0
			−2		4	$-2\,M'_{III}$	=0

Tafel 9.

	M'_I	M'_{II}	M'_{III}
$M'_1=$	$\frac{11}{26}$	$\frac{5}{13}$	$\frac{5}{26}$
$M'_2=$	$\frac{4}{13}$	$\frac{6}{13}$	$\frac{3}{13}$
$M'_3=$	$\frac{4}{13}$	$\frac{6}{13}$	$\frac{3}{13}$
$M'_4=$	$\frac{5}{26}$	$\frac{7}{13}$	$\frac{7}{26}$
$M'_5=$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
$M'_7=$	$\frac{5}{52}$	$\frac{7}{26}$	$\frac{33}{52}$

Als Lösung erhält man Tafel 9. Nunmehr sind die Gleichungen (25b) aufzulösen (Tafel 10), wobei $C=\frac{1}{N}\frac{a^2}{36}$ ist. Das Ergebnis zeigt Tafel 11.

Tafel 10.

w'_1	w'_2	w'_3	w'_4	w'_5	w'_7	=	$M'_I\cdot C$	$M'_{II}\cdot C$	$M'_{III}\cdot C$
4	−1		−2				$\frac{11}{26}$	$\frac{5}{13}$	$\frac{5}{26}$
−1	4	−1		−2			$\frac{4}{13}$	$\frac{6}{13}$	$\frac{3}{13}$
	−4	4					$\frac{4}{13}$	$\frac{6}{13}$	$\frac{3}{13}$
−1			4	−1	−1		$\frac{5}{26}$	$\frac{7}{13}$	$\frac{7}{26}$
	−2		−2	4			$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
			−2		4		$\frac{5}{52}$	$\frac{7}{26}$	$\frac{33}{52}$

Tafel 11.

	$[M'_I$	M'_{II}	$M'_{III}]\cdot C$
$w'_1=$	0,443 05	0,698 23	0,397 19
$w'_2=$	0,650 89	1,091 72	0,603 55
$w'_3=$	0,727 81	1,207 10	0,661 25
$w'_4=$	0,349 11	0,658 29	0,396 45
$w'_5=$	0,562 50	1,0	0,562 50
$w'_7=$	0,198 60	0,396 45	0,356 88

Durch Einsetzen der Werte der Tafel 11 in die Gleichungen (29) erhält man aus (26) drei lineare Gleichungen zur Ermittlung der Unbekannten $M'_I\ M'_{II}\ M'_{III}$. Ihre Auflösung ergibt

$$M'_I = -0{,}051\,78\ pa^2,$$
$$M'_{II} = -0{,}043\,39\ pa^2,$$
$$M'_{III} = -0{,}019\,16\ pa^2.$$

Da längs der Auflagerkante ($x=0$) die Krümmungen $\partial^2 w/\partial y^2$ verschwinden, stellen diese Werte für $r=0$ zugleich die Einspannmomente m_x dar. Das Mittenmoment, errechnet nach der Stirlingschen Formel (30b), beträgt $m_{x,3}=-0{,}019\,995\ pa^2$ und damit das endgültige Feldmoment $m_{x,3}=(0{,}036\,845-0{,}019\,995)\ pa^2=0{,}016\,85\ pa^2$ (Tafel 12).

Tafel 12. *(Quadratische Platte.)*

Feldmoment	Stützenmoment	
0,017 75 pa^2	−0,051 5 pa^2	*Nádai*[1]
0,018 4 „	−0,051 5 „	*Leitz*[2]
0,020 9 „	−0,054 46 „	*Lewe*[3]
0,018 03 „	−0,047 37 „	*Marcus*[4] (64 Maschenteilung)
0,016 85 „	−0,051 78 „	Interpolationsverfahren (36 Maschenteilung)

Die Biegewinkel $\partial w_0/\partial n$ einer Rechteckplatte infolge Einzelkraftbelastung sind aus den Formeln (9) bzw. (12) zu bestimmen. Eine an beliebiger Stelle im Platteninnern angreifende Einzellast wird für die Zusatzlösung w' durch Belastungsumordnung in vier symmetrische und

[1] *A. Nâdai*, a. a. O. S. 184.
[2] *H. Leitz*, Z. Math. u. Physik 64 (1917) S. 270.
[3] *V. Lewe*, Pilzdecken und andere trägerlose Eisenbetonplatten. S. 48. Berlin 1926.
[4] *H. Marcus*, a. a. O. S. 154.

antisymmetrische Lastzustände zerlegt. Durch diese Lastumgruppierungen gelingt es, die Differenzenrechnungen auf das in Abb. 15 für die quadratische Platte dargestellte eine Plattenviertel zu beschränken.

Für die durch eine Einzelkraft in Feldmitte belastete quadratische Platte erhält man die Werte:

$$M'_I = -0{,}13085\ P,\quad M'_{II} = -0{,}09303\ P,\quad M'_{III} = -0{,}01998\ P,$$

die zugleich die Einspannmomente längs des Plattenauflagerlagers darstellen. In Feldmitte ergibt sich bei einer Aufstandslänge von $c = 0{,}02\ a$ für die Linienlast P das Moment $m_{x,3} = 0{,}2582\ P$. Für dieses Moment können Vergleichswerte nicht unmittelbar angegeben werden. Das größte Stützenmoment $m_{x,1} = -0{,}13085\ P$ beträgt nach der Lösung von *Hencky*[1] $m_x = -0{,}126\ P$, nach der Differenzenrechnung von *Marcus*[2] bei einer Einteilung der Platte in 64 Maschen $m_x = -0{,}1172\ P$. Die Abweichung von dem *Henckyschen* Wert ist demnach noch nicht 4% groß.

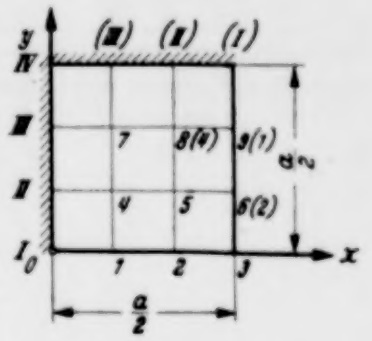

Abb. 15. Vierseitig eingespannte Platte.

4. Die auf zwei gegenüberliegenden Seiten eingespannte quadratische Platte. Als w_0-System dient hier die auf zwei gegenüberliegenden Seiten freiaufliegende Platte. Für Einzelkraftbelastung an beliebiger Stelle der Platte genügt wie unter 3. bei Belastungsumgruppierung in vier zu den Plattenachsen symmetrische und antisymmetrische Lastzustände die Beschränkung der Berechnung auf ein Viertel der Platte.

Zwei für die Anwendung besonders wichtige Fälle sind

A. Einzellast P am Plattenrand. Wie im Abschnitt 4 erläutert, erfolgt die Berechnung zweckmäßig durch Trennung des Lastfalls in einen symmetrischen und antisymmetrischen Anteil. Die symmetrische Belastung ergibt sich aus (17) mit $X_m = 2$, wie ohne weiteres aus den Gleichungen (14a) und (14b) zu entnehmen ist; für die antisymmetrische Last gilt (18) mit $Y_m = 2$. Damit erhält man im symmetrischen Fall

$$w_0^S = \frac{2\,Pa^2}{\pi^3 N} \sum_m \frac{1}{m^3} \left[A_m \operatorname{Cof} \alpha y + B_m \alpha y \operatorname{Sin} \alpha y \right] \sin \alpha \xi \sin \alpha x \quad (m = 1, 2, 3, \ldots)\ . \tag{30}$$

Hierbei ist

$$B_m = -\frac{1}{3 \operatorname{Sin} \alpha \frac{b}{2} - \frac{\alpha \frac{b}{2}}{\operatorname{Cof} \alpha \frac{b}{2}}},\quad A_m = -B_m \left(2 + \alpha \frac{b}{2} \operatorname{Tg} \alpha \frac{b}{2}\right). \tag{31}$$

Bei Antisymmetrie gilt entsprechend

$$w_0^A = \frac{2\,Pa^2}{\pi^3 N} \sum_m \frac{1}{m^3} \left[C_m \operatorname{Sin} \alpha y + D_m \alpha y \operatorname{Cof} \alpha y \right] \sin \alpha \xi \sin \alpha x \quad (m = 1, 2, 3, \ldots) \tag{32}$$

mit

$$D_m = -\frac{1}{3 \operatorname{Cof} \alpha \frac{b}{2} + \frac{\alpha \frac{b}{2}}{\operatorname{Sin} \alpha \frac{b}{2}}},\quad C_m = -D_m \left(2 + \alpha \frac{b}{2} \operatorname{Ctg} \alpha \frac{b}{2}\right). \tag{33}$$

Die hieraus errechneten Neigungswinkel der Biegefläche der quadratischen Platte für den Rand enthält Tafel 13.

Tafel 13.

Punkt	$\frac{\partial w_0^S}{\partial x}$	$\frac{\partial w_0^A}{\partial x}$	
$y = 0$	0,110 16	0	$\times \frac{Pa}{N}$
$\frac{b}{6}$	0,115 66	0,034 013	
$\frac{b}{3}$	0,130 54	0,068 333	
$\frac{b}{2}$	0,150 17	0,102 257	

[1] *H. Hencky*, Über den Spannungszustand in rechteckigen ebenen Platten. (Diss. Darmstadt 1913.)
[2] *H. Marcus*, a. a. O. S. 161.

B. Einzellast P in Plattenmitte. Aus den Gleichungen (14a), (14b) und (15a) kommt

$$X_m = \frac{(2 + ab\,\mathfrak{Ctg}\,ab)\,\mathfrak{Sin}\,a\frac{b}{2} - a\frac{b}{2}\,\mathfrak{Cof}\,a\frac{b}{2}}{\mathfrak{Sin}\,ab}.$$

Nach entsprechenden Zwischenrechnungen erhält man die Biegewinkel der quadratischen Platte längs des Randes $x=0$ aus Tafel 14.

Tafel 14.

Punkt	$\frac{\partial w_0^S}{\partial x}$	
$y=0$	0,068 532	$\times \frac{Pa}{N}$
$\frac{b}{6}$	0,065 366	
$\frac{b}{3}$	0,060 357	
$\frac{b}{2}$	0,055 066	

Die Zusatzlösungen w' und M' müssen folgende Bedingungen erfüllen: für den Rand $y=\frac{a}{2}$ ist $m'_y=0$, $q'_y=0$, für den Rand $x=0$ ist $\frac{\partial w'}{\partial x} = -\frac{\partial w_0}{\partial x}$.

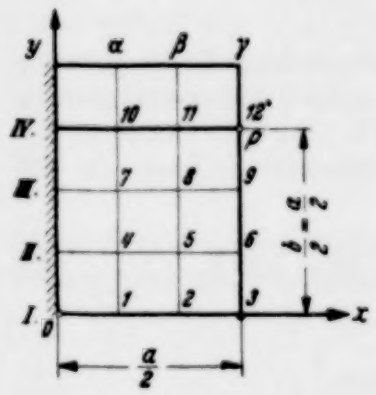

Abb. 16. Zweiseitig eingespannte Platte.

Im symmetrischen Lastfall (Abb. 16) werden zur Bestimmung der Größen m'_y und q'_y längs der Kante $y=\frac{a}{2}$ Hilfspunkte α, β, γ eingeführt. Aus den Gleichungen (25a) sind sodann die Momentensummen $M'_1 \div M'_{12}$ als Funktionen der Werte $M'_I \div M'_{II}$ und $M'_\alpha \div M'_\gamma$ zu bestimmen. Auf Grund der Beziehungen (25b) können die Durchbiegungen $w'_1 \div w'_9$ durch die Momentensummen $M'_1 \div M'_{12}$ ausgedrückt werden. Die Werte w'_{10}, w'_{11}, w'_{12} erhält man ebenfalls aus (25b) in Verbindung mit der ersten Randbedingung, die die Elimination von w'_α, w'_β und w'_γ gestattet. Darauf sind in den Gleichungen für die Durchbiegungen w' die Werte $M'_1 \div M'_{12}$ durch die sieben unbekannten Momentensummen M'_I bis M'_γ zu ersetzen. Schließlich eliminiert man mittels der zweiten Randbedingung die Unbekannten M'_α, M'_β und M'_γ und erhält damit die Werte $w'_1 \div w'_{12}$ als Funktionen der vier Unbekannten M'_I bis M'_{IV} (Tafel 15). Zu deren Ermittlung steht die dritte Randbedingung zur Verfügung. Mit Hilfe der Newtonschen Interpolationsformel (28b) ergeben sich damit folgende vier Gleichungen (Tafel 16), wobei für die Belastungsglieder $(\partial w_0/\partial x)$ die $\frac{6N}{a}$-fachen Werte der Tafeln 13 und 14 eingeführt sind.

Tafel 15.

	m'_I	m'_{II}	m'_{III}	m'_{IV}	
w'_1	0,509 31	0,885 76	0,764 22	0,340 71	$\times C$
w'_2	0,748 79	1,405 36	1,269 71	0,576 14	
w'_3	0,824 65	1,574 35	1,442 39	0,658 62	
w'_4	0,442 88	0,894 56	0,798 61	0,363 96	
w'_5	0,702 68	1,388 69	1,301 61	0,607 02	
w'_6	0,787 17	1,551 47	1,470 69	0,690 66	
w'_7	0,382 11	0,798 61	0,883 16	0,436 12	
w'_8	0,634 86	1,301 61	1,368 73	0,694 80	
w'_9	0,721 19	1,470 69	1,528 68	0,779 44	
w'_{10}	0,340 71	0,727 92	0,872 25	0,559 13	
w'_{11}	0,576 14	1,214 04	1,389 60	0,820 22	
w'_{12}	0,658 62	1,381 33	1,558 88	0,901 18	

Tafel 16.

M'_I	M'_{II}	M'_{III}	M'_{IV}	Fall A $\frac{6N}{a}\frac{\partial w_0^S}{\partial x}$		Fall B $\frac{6N}{a}\frac{\partial w_0^S}{\partial x}$	
0,740 782	1,062 838	0,834 040	0,362 355	0,660 96		0,411 19	
0,531 408	1,161 196	0,911 396	0,395 942	0,693 96	$\times P$	0,392 20	$\times P$
0,417 019	0,911 429	1,151 706	0,519 844	0,782 24		0,362 14	
0,362 351	0,791 871	1,039 687	0,806 089	0,901 02		0,330 40	

Die Auflösung ergibt die Zahlen der Tafel 17.

Tafel 17.

	Lastfall A	Lastfall B	
M'_I	−0,101 62	−0,205 32	
M'_{II}	−0,144 73	−0,147 23	$\times P$
M'_{III}	−0,258 81	−0,108 93	
M'_{IV}	−0,596 10	−0,032 45	

Im antisymmetrischen Fall führt eine ähnliche Rechnung auf die Ermittlung von drei unbekannten Momentensummen M'_{II}, M'_{III} und M'_{IV} mittels der in Tafel 18 und 19 angegebenen Gleichungen. Die Durchbiegung w'_1, w'_2, w'_3 sind für diesen Lastfall Null. Damit ergeben sich die Werte

$$M'_{II} = -0{,}12187\ P,\quad M'_{III} = -0{,}28300\ P,\quad M'_{IV} = -0{,}65910\ P.$$

Tafel 18.

	m'_{II}	m'_{III}	m'_{IV}	
w'_4	0,149 53	0,143 65	0,129 16	
w'_5	0,150 83	0,194 38	0,201 18	
w'_6	0,145 30	0,205 14	0,222 92	
w'_7	0,140 55	0,272 01	0,278 89	
w'_8	0,190 69	0,343 32	0,412 40	$\times C$
w'_9	0,201 92	0,359 36	0,450 45	
w'_{10}	0,112 80	0,253 56	0,467 94	
w'_{11}	0,182 52	0,386 45	0,633 64	
w'_{12}	0,206 27	0,426 83	0,678 97	

Tafel 19.

M'_{II}	M'_{III}	M'_{IV}	$\frac{6N}{a}\frac{\partial w_0^A}{\partial x}$	
0,348 400	0,215 073	0,152 867	0,204 078	
0,212 860	0,491 834	0,371 522	0,409 998	$\times P$
0,133 919	0,323 543	0,767 199	0,613 542	

Unter Benutzung der Stirlingschen Interpolationsformel (30b) erhält man mit Hilfe der Tafeln 15 und 18 die Momente m' in Plattenmitte. Die endgültigen Momente m'' für die durch eine Einzelkraft am Rand belastete Platte ergeben sich dann aus $\frac{1}{2}[A)+B)]$. Mit der Addition dieser Werte zu den m_0-Momenten (Abschnitt 4) sind damit die Feldmomente $m = m_0 + m''$ der Platte bestimmt (Abb. 17). Das Moment in der y-Richtung beträgt in Feldmitte $m_y\left(\frac{a}{2}, 0\right) = -0{,}0553\ P$ unter Anwendung der Formel (30c).

Für die in Plattenmitte $\left(x = \frac{a}{2},\ y = 0\right)$ angreifende Einzellast folgt aus analogen Rechenoperationen der Wert für das Feldmoment zu $m_x\left(\frac{a}{2}, 0\right) = 0{,}2981\ P$, für das Stützenmoment (Tafel 17) zu $m_{x(0,0)} = -0{,}2053\ P$. Das Biegemoment in der y-Richtung ist nach (30c) $m_y\left(\frac{a}{2}, 0\right) = 0{,}3177\ P$.

Für die zweiseitig freiaufliegende quadratische Platte beträgt das Moment m_x in Feldmitte bei Belastung des Plattenrandes (Tafel 7) $m_x\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) = 0{,}955\ P \quad \left(\frac{r}{a} = 0{.}02\right)$.

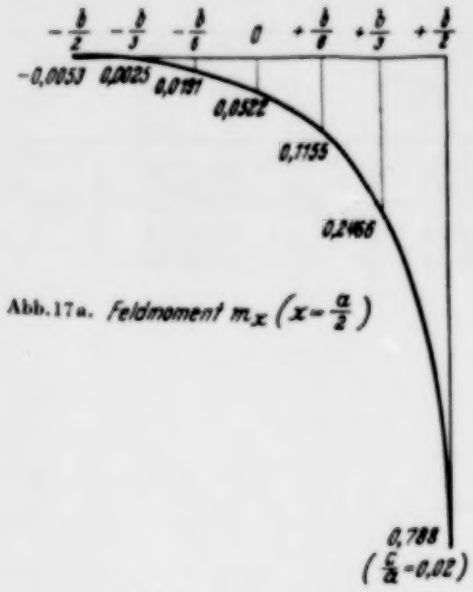

Abb. 17a. *Feldmoment* $m_x\left(x=\frac{a}{2}\right)$

Vergleicht man hiermit das Moment des freiaufliegenden Balkens von der Spannweite a $\left(\mathfrak{M}_0=\frac{Pa}{4}\right)$, so ergibt sich die „Verteilungsbreite" B aus

$$\frac{Pa}{4B}=0{,}955\ P; \qquad B_0=\frac{a}{4\cdot 0{,}955}=0{,}26\ a.$$

Für die zweiseitig eingespannte Platte gilt:

a) Feldmoment: $\frac{Pa}{8B}=0{,}788\ P,\ B_F=0{,}14\,a,$

b) Stützenmoment: $\frac{Pa}{8B}=-0{,}6276\ P,\ B_S=0{,}20\,a.$

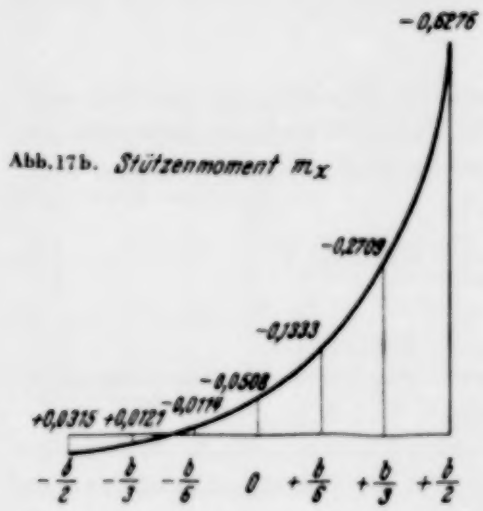

Abb. 17b. *Stützenmoment* m_x

Steht die Einzellast in Plattenmitte $\left(x=\frac{a}{2},\ y=0\right)$, so sind die entsprechenden Werte

für die freiaufliegende Platte

$$B_0=\frac{a}{4\cdot 0{,}4219}=0{,}59\ a,$$

für die eingespannte Platte

$$B_F=\frac{a}{8\cdot 0{,}2981}=0{,}42\ a,\quad B_S=\frac{a}{8\cdot 0{,}2053}=0{,}61\ a.$$

Ermittelt man bei mehreren neben- und hintereinander stehenden Einzellasten somit in der üblichen Weise zunächst die Momente $\mathfrak{M}$ wie beim einachsigen System (Balken) unter Einführung der Gesamtbreite b der Platte, so kann man zu einer einfachen, für praktische Zwecke genügend genauen Abschätzung des zweiachsigen Spannungszustandes der eingespannten Platte gelangen, wenn mit Hilfe der Einflußflächen für die freiaufliegende Platte (Abschnitt 4) die Verteilungsbreite B_0 durch Vergleich mit dem Gesamtmoment $\mathfrak{M}_0$ des freiaufgelagerten Balkens bestimmt wird. Die Breite B_0 ist im Falle der eingespannten Platte für die Feldmomente auf rd. 60 %, für die Stützenmomente auf 80 % zu reduzieren, die mit dieser neuen Breite B aus den Momenten $\mathfrak{M}_E$ des eingeklemmten Balkens zu ermitteln sind. Teilt man die gesamte Plattenbreite b in zwei Randzonen je von der Breite $b_r=0{,}25\,b$ und eine Mittelzone der Breite $b_m=0{,}50\,b$ und bestimmt hierfür jeweils die entsprechende Verteilungsbreite B_0 auf die oben dargelegte Weise, so gilt die obige Reduktion für den Randstreifen. Für die Mittelzone genügt bei der Ermittlung des Feldmoments eine Verringerung der Verteilungsbreite auf $\frac{2}{3}\,B_0$. Das Moment m_y in der Querrichtung kann mit dem Wert der freiaufliegenden Platte auch für die eingespannte Platte übernommen werden. Auf diese Weise wird seiner Vergrößerung bei Einführung der Querdehnung ν in gewissem Sinne Rechnung getragen. Diese zunächst nur für das häufig auftretende Lastaufstandsverhältnis $\frac{c}{a}=0{,}02$ des Feldmoments gültige Reduktion wird in den meisten Fällen zur Abschätzung der Beanspruchung ausreichen, weil im allgemeinen die Einwirkung einer größeren Anzahl von Einzellasten zu berücksichtigen ist, deren Anteil am Moment genau genug aus ihrer Punktbelastung errechnet werden kann, da sie nicht unter der singulären Stelle der Einflußfläche liegen; ihr Einfluß wirkt um so mehr „lastverteilend", je weiter sie von dem betrachteten Querschnitt in Feldmitte entfernt sind.

6. Schluß. Fußwege werden bei Plattenbrücken meist als dünne Kragplatten aus der Fahrbahnplatte seitlich ausgekragt. Sie erzeugen somit längs des Plattenrandes eine Linienlast, deren Wirkung aus den Einflußflächen der Tafel 7 bzw. allgemein aus der Gleichung (19) für $\xi = \frac{a}{2}$, $c = \frac{a}{2}$ berechnet werden kann (Abb. 12). Das außerdem vorhandene, längs der Kante $y' = 0$ entstehende Kragmoment m_k läßt sich in seiner Wirkung auf die zweiseitig freiaufliegende Platte mit dem Ansatz

$$w = \frac{4\, m_k\, a^2}{\pi^3\, N} \sum \frac{1}{m^3} \left\{ \mathfrak{A}_m \operatorname{Cof} a\, y' + \mathfrak{B}_m \operatorname{Sin} a\, y' + \mathfrak{C}_m\, a\, y' \operatorname{Cof} a\, y' + \mathfrak{D}_m\, a\, y' \operatorname{Sin} a\, y' \right\} \sin a\, x \qquad (m = 1, 3, 5, \ldots) \tag{34}$$

erfassen. Mit den Randbedingungen

$$\begin{aligned} m_y' &= -\frac{4\, m_k}{\pi} \sum_m \frac{1}{m} \sin a\, x \quad (m = 1, 3, 5, \ldots), \\ q_y' &= 0 \qquad\qquad \text{für } y' = 0, \\ m_y' &= 0, \\ q_y' &= 0 \qquad\qquad \text{für } y' = b \end{aligned}$$

erhält man die Beiwerte

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{D}_m &= -\frac{1}{\frac{(a\,b)^2}{3}(1 - \operatorname{Ctg}^2 a\, b) + 3}, \\ \mathfrak{C}_m = \mathfrak{B}_m &= -\mathfrak{D}_m \left[\frac{a\, b}{3}(1 - \operatorname{Ctg}^2 a\, b) + \operatorname{Ctg} a\, b \right] \quad (m = 1, 3, 5, \ldots) \\ \mathfrak{A}_m &= -2\, \mathfrak{D}_m - 1. \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

Damit können die Biegungsmomente dieses Lastfalls für die auf zwei gegenüberliegenden Seiten freiaufliegende Platte berechnet werden. Für die eingespannte, zweiseitig aufgelagerte Platte lassen sich die Ergebnisse des vorigen Abschnitts sinngemäß verwenden.

In konstruktiver Hinsicht wird man bei weitgespannten, hochbeanspruchten kontinuierlichen Plattenbrücken die Kragplatten über den Mittelauflagern durch Querfugen trennen, um eine Mitwirkung und damit eine Rißbildung dieser Platten auszuschließen.

(Eingegangen am 17. Juli 1944.)

Über die Berücksichtigung der Schubverzerrung in ebenen Platten.

Von H. Hencky in Gustavsburg.

1. Einleitung. Die naheliegende Aufgabe der Berechnung der Biegelinie von Platten und Balken unter Berücksichtigung des Einflusses der Schubverzerrung hat noch keine einwandfreie Lösung gefunden. Die in der Technik übliche Berechnung einer zusätzlichen Durchbiegung kann nur für den Fall eines freigelagerten Balkens mit gleichmäßig verteilter Belastung den Wert einer groben Näherung beanspruchen und ist nicht geeignet, diese Frage zu klären.

Es ist zunächst klar, daß der Einfluß der Schubverzerrungen bei stark wechselnden Lastkonzentrationen entsprechend wächst. Außerdem hat die Annahme der gewöhnlichen Theorie, daß die Normalen zur Plattenmittelfläche auch nach der Verformung normal bleiben, etwas Unbefriedigendes. Um diesen Komplex von Fragen und Unklarheiten einmal aufzulösen, stellen wir uns die Aufgabe, eine nicht zu dicke ebene Platte hinsichtlich ihres Verhaltens gegenüber veränderlichen, aber stetig verteilten Lasten zu untersuchen.

2. Das Prinzip der virtuellen Arbeit und sein Nutzen bei derartigen Untersuchungen. Ganz wie in der Dynamik des *Lagrange* gehen wir vom Kinematischen aus. Die Normale zur Mittelfläche sei zur z-Richtung gewählt, dann machen wir zur Darstellung der Verformung den folgenden Ansatz:

$$\left.\begin{aligned} u &= -\frac{z}{h}\,\psi(x,y),\\ v &= -\frac{z}{h}\,\chi(x,y),\\ w &= \varphi(x,y); \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

ψ, χ, φ sind drei unbekannte Funktionen von x und y; u, v, w sind die elastischen Verschiebungen eines beliebigen Punktes der Platte.

Daß die Verschiebungen w unabhängig von z angenommen sind, ist nur dann unbedenklich, wenn die Normalspannungen zur Plattenoberfläche verglichen mit dem durch die Lasten hervorgerufenen Spannungszustand vernachlässigbar klein sind. Man kann dann die Platte in parallele Schichten zerlegt denken, die man hinsichtlich der Normalspannungen nach den für ebene Spannungszustände geltenden Regeln behandeln kann.

Setzt man $$E' = \frac{E\,m^2}{m^2-1}, \qquad 2G = \frac{E'(m-1)}{m},$$

so erhalten wir aus dem *Hooke*schen Gesetz wegen

$$\sigma_z = \frac{E\,m}{m+1}\,\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{m-2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial z}\right) = 0$$

das Elastizitätsgesetz

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= E'\left(\frac{\partial u}{\partial u} + \frac{1}{m}\,\frac{\partial v}{\partial y}\right),\\ \sigma_y &= E'\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{m}\,\frac{\partial u}{\partial x}\right),\\ \tau_x &= E'\,\frac{m-1}{2\,m}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right),\\ \tau_y &= E'\,\frac{m-1}{2\,m}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right),\\ \tau_z &= E'\,\frac{m-1}{2\,m}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right). \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Die Spannung σ_z kann auf Grund des Elastizitätsgesetzes nicht bestimmt werden, sondern muß durch die statischen Bedingungen des Problems gegeben sein.

Durch Kombination von (2) und (1) erhalten wir jetzt die Spannungswerte in der Platte

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_x &= -E'\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{1}{m}\frac{\partial\chi}{\partial y}\right)\frac{z}{h},\\
\sigma_y &= -E'\left(\frac{\partial\chi}{\partial y}+\frac{1}{m}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\frac{z}{h},\\
\tau_x &= -E'\frac{m-1}{2m}\left(\frac{\chi}{h}-\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right),\\
\tau_y &= -E'\frac{m-1}{2m}\left(\frac{\psi}{h}-\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right),\\
\tau_z &= -E'\frac{m-1}{2m}\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}+\frac{\partial\chi}{\partial x}\right)\frac{z}{h}.
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Die Spannungswerte τ_x und τ_y verschwinden bei der klassischen Plattentheorie; hier werden sie nur von x und y abhängig, so daß nunmehr wenigstens der mittlere Wert des Schubes in die Rechnung einbezogen wird. Auf der Ober- und Unterseite der Platte sollen keine Schubspannungen wirken.

Mit dieser Oberflächenbedingung sind nun aber unsere Gleichungen (3) im Widerspruch, denn die τ_x und τ_y sind danach nicht mehr Null. Beim Anschreiben der virtuellen Arbeit muß aus diesem Grunde der vollständige, aus Oberflächenarbeit und innerer Arbeit bestehende Ausdruck gesetzt werden.

Wir wollen folgende Bezeichnungen einführen:

$(P_x)_a$, $(P_y)_a$, $(P_z)_a$ belastende äußere Randspannungen,
$(P_x)_i$, $(P_y)_i$, $(P_z)_i$ die sich aus den angenommenen u, v, w und dem Elastizitätsgesetz ergebenden Randspannungen, ferner die „Gleichgewichtsbedingungen"

$$\left.\begin{aligned}
L_I &= \frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_z}{\partial y}+\frac{\partial\tau_y}{\partial z},\\
L_{II} &= \frac{\partial\tau_z}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_x}{\partial z},\\
L_{III} &= \frac{\partial\tau_y}{\partial x}+\frac{\partial\tau_x}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}.
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Dann lautet die Gleichung der virtuellen Arbeit

$$\left.\begin{aligned}
&\iint d0\left\{[(P_x)_a-(P_x)_i]\,\delta u+[(P_y)_a-(P_y)_i]\,\delta v+[(P_z)_a-(P_z)_i]\,\delta w\right\}\\
&\quad+\iiint dV\left\{L_I\,\delta u+L_{II}\,\delta v+L_{III}\,\delta w\right\}=0.
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Hat man die genaue Lösung für u, v, w, dann ist

$$(P_x)_a=(P_x)_i,\quad (P_y)_a=(P_y)_i,\quad (P_z)_a=(P_z)_i,$$
$$L_I=L_{II}=L_{III}=0$$

beim Fehlen von Volumen- oder Massenkräften. In der technischen Mechanik stehen uns aber genaue Lösungen meist nicht zur Verfügung. Setzt man nun ein willkürliches System u, v, w, so sind die $(P_x)_a-(P_x)_i$, ... L_I ... eben nicht Null, sondern stellen unvermeidliche Fehlspannungen bzw. Fehlvolumenkräfte vor. Schränken wir nun die kinematischen Möglichkeiten der u, v, w durch entsprechende Annahmen, wie sie z. B. in unserer Gleichung (1) vorliegen, ein, so wird es trotzdem möglich, das Arbeitsintegral aus allen diesen Fehlspannungen bzw. Fehlkräften zum Verschwinden zu bringen.

Insbesondere bei einer Platte haben wir die Gleichung der virtuellen Arbeit zunächst in der Form

$$\left.\begin{aligned}
&\iint\Big\{[(\tau_y)_a-(\tau_y)_i]\,\delta u\left(z=+\tfrac{h}{2}\right)-[(\tau_y)_a-(\tau_y)_i]\,\delta u\left(z=-\tfrac{h}{2}\right)+\\
&\quad+[(\tau_x)_a-(\tau_x)_i]\,\delta v\left(z=+\tfrac{h}{2}\right)-[(\tau_x)_a-(\tau_x)_i]\,\delta v\left(z=-\tfrac{h}{2}\right)+\\
&\quad+[(\sigma_z)_a-(\sigma_z)_i]\,\delta w\left(z=+\tfrac{h}{2}\right)-[(\sigma_z)_a-(\sigma_z)_i]\,\delta w\left(z=-\tfrac{h}{2}\right)\Big\}\,dx\,dy+\\
&\quad+\iiint\left\{L_I\,\delta u+L_{II}\,\delta v+L_{III}\,\delta w\right\}dx\,dy\,dz=0.
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Äußere Spannungen $(\tau_x)_a$, $\tau_y)_a$ nehmen wir nicht an, ferner

$$(\sigma_z)_a\left(z=+\frac{h}{2}\right)=p, \qquad (\sigma_z)_a\left(z=-\frac{h}{2}\right)=0.$$

Die inneren Spannungen, die wir aus dem Elastizitätsgesetz bekommen, müssen wir hinnehmen. Wir setzen nun die Werte aus (1) und (3)

$$\delta u\left(z=+\frac{h}{2}\right)-\delta u\left(z=-\frac{h}{2}\right)=-\delta\psi,$$

$$\delta v\left(z=+\frac{h}{2}\right)-\delta v\left(z=-\frac{h}{2}\right)=-\delta\chi,$$

$$(\sigma_z)_i=0$$

in (6) ein und erhalten

$$+\iint(\tau_y\delta\psi+\tau_x\delta\chi+p\delta\varphi)\,dx\,dy+$$

$$+\iiint\left(-L_I\frac{z}{h}\delta\psi-L_{II}\frac{z}{h}\delta\chi+L_{III}\delta\varphi\right)dx\,dy\,dz=0.$$

Da sich die Integrale über z auswerten lassen, kann man die Gleichung in folgender Weise schreiben:

$$\left.\begin{aligned}\iint\Big[&-E'\frac{m-1}{2m}\left(\frac{\psi}{h}-\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\delta\psi-E'\frac{m-1}{2m}\left(\frac{\chi}{h}-\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\delta\chi+\\&+p\delta\varphi-\delta\psi\int L_I\frac{z}{h}\,dz-\delta\chi\int L_{II}\frac{z}{h}\,dz+\delta\varphi\int L_{III}\,dz\Big]dx\,dy=0\end{aligned}\right\}\tag{6a}$$

und in etwas anderer Ordnung:

$$\left.\begin{aligned}\iint\Big\{&-\delta\psi\left[E'\frac{m-1}{2m}\left(\frac{\psi}{h}-\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)+\int L_I\frac{z}{h}\,dx\right]-\\&-\delta x\left[E'\frac{m-1}{2m}\left(\frac{\chi}{h}-\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)+\int L_{II}\frac{z}{h}\,dx\right]+\\&+\delta\varphi\left[\int L_{III}\,dz+p\right]\Big\}\,dx\,dy=0.\end{aligned}\right\}\tag{6b}$$

Wegen der Unabhängigkeit der Variationen $\delta\psi, \delta\chi, \delta\varphi$ müssen dann die drei Gleichungen gelten

$$E'\frac{m-1}{2m}\left(\psi-h\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)+\int L_I z\,dz=0, \tag{I}$$

$$E'\frac{m-1}{2m}\left(\chi-h\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)+\int L_{II} z\,dz=0, \tag{II}$$

$$\int L_{III}\,dz+p=0. \tag{III}$$

Die hier vorkommenden Integrale lassen sich noch etwas weiter umformen. Es ist

$$\int L_I z\,dz=\int\left(\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_z}{\partial y}+\frac{\partial\tau_y}{\partial z}\right)z\,dz$$

$$=\int\left(\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_z}{\partial y}\right)z\,dz+\int_{-h/2}^{+h/2}\frac{\partial\tau_y}{\partial z}\,z\,dz$$

$$=\int\left(\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_z}{\partial y}\right)z\,dz+(\tau_y z)_{-h/2}^{+h/2}-\int\tau_y\,dz.$$

Hier ist aber nach (3)

$$(\tau_y z)_{-h/2}^{+h/2}=-E'\frac{m-1}{2m}\left(\psi-h\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right).$$

Durch Einsetzen in (1) kommt daher

$$\int\left(\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_z}{\partial y}\right)z\,dz-\int\tau_y\,dz=0 \tag{I}$$

und analog

$$\int\left(\frac{\partial\tau_z}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}\right)z\,dz-\int\tau_x\,dz=0. \tag{II}$$

Setzt man die Werte von τ_y und τ_x aus (I) und (II) in die dritte Gleichung (4) ein, so wird aus (III)

$$\int \left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \tau_z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} \right) z \, dz + p = 0. \tag{III}$$

Damit sind die drei Differentialgleichungen für die unbekannten Funktionen ψ, χ, φ gefunden. Alle drei gelten unverändert auch für den klassischen Ansatz der Plattentheorie. Nur dienen in diesem Fall die Gleichungen (I) und (II) bloß dazu, die in diesem Fall statisch bestimmten Scherspannungsresultanten zu ermitteln.

3. Die Differentialgleichungen für die dicke Platte. Durch Einsetzen der Spannungswerte (3) erhalten wir

$$E' \frac{m-1}{2m} \left(\psi - \frac{\partial \varphi}{\partial x} h \right) = \frac{E' h^2}{12} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{m-1}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{m+1}{2m} \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y} \right), \tag{I}$$

$$E' \frac{m-1}{2m} \left(\chi - \frac{\partial \varphi}{\partial y} h \right) = \frac{E' h^2}{12} \left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} + \frac{m-1}{2m} \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} + \frac{m+1}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right), \tag{II}$$

$$\frac{E' h^2}{12} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} \right) \right] = p. \tag{III}$$

In dieser Form ist nicht ohne weiteres zu sehen, wie man von diesen Gleichungen zur klassischen Plattengleichung kommen kann. Wir eliminieren daher aus (I) und (II) zunächst φ, indem wir nach x bzw. y differentiieren und abziehen:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial \chi}{\partial x} = \frac{h^2}{12} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial \chi}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial \chi}{\partial x} \right) \right]. \tag{Ia}$$

Differentiieren wir andererseits die Gleichung (I) nach $\frac{\partial^3}{\partial x^3}$, $\frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2}$, die Gleichung (II) nach $\frac{\partial^3}{\partial y^3}$, $\frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y}$ und addieren, so erhalten wir

$$\left.\begin{aligned} E' \frac{m-1}{2m} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} \right) - h \left[\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} \right] \right\} \\ = \frac{E' h^2}{12} \left[\frac{\partial^4}{\partial x^4} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \chi}{\partial y} \right) + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \chi}{\partial y} \right) + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \chi}{\partial y} \right) \right]. \end{aligned}\right\} \tag{IIa}$$

Differentiieren wir andererseits die Gleichung (III) zweimal nach x und y und addieren (Laplacesche Operation), so erhalten wir

$$\frac{E' h^2}{12} \left[\frac{\partial^4}{\partial x^4} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \chi}{\partial y} \right) + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \chi}{\partial y} \right) + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \chi}{\partial y} \right) \right] = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2}. \tag{IIIa}$$

Kombination von (IIa), (IIIa) und (III) ergibt schließlich die von ψ und χ freie Gleichung

$$\frac{E' h^3}{12} \left(\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} \right) = p - \frac{h^2}{6} \frac{m}{m-1} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x_2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right). \tag{IIIb}$$

Die drei Gleichungen (Ia), (III) und (IIIb) kann man nun zum Übergang zur klassischen Plattentheorie verwenden, wenn das Verhältnis der Dicke zur mittleren Plattenseite klein ist. Zuvor wollen wir aber diese Gleichungen auf eine etwas einfachere Form bringen. Es ergibt sich dabei ein Vorteil in der Schreibweise, wenn man für die Operation $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ das Zeichen Δ setzt. Die drei Gleichungen lassen sich dann in folgender Form anschreiben:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial \chi}{\partial x} = \frac{h^2}{12} \Delta \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial \chi}{\partial x} \right); \tag{Ic}$$

aus (III) durch Änderung der Differentiationsfolge

$$\frac{E' h^2}{12} \Delta \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \chi}{\partial y} \right) = p; \tag{IIc}$$

und schließlich noch mit (IIIb)

$$\frac{E' h^3}{12} \Delta \Delta \varphi = p - \frac{h^2}{6} \frac{m}{m-1} \Delta p. \tag{IIIc}$$

Bei kleinem h kann man nun dieses System vereinfachen zu

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial \chi}{\partial x} = 0,$$
$$\frac{h^2}{12} \Delta \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \chi}{\partial y} \right) = \frac{p}{E'},$$
$$\frac{E' h^3}{12} \Delta \Delta \varphi = p.$$

Man kann dann eine neue Funktion ω einführen, um wenigstens die erste dieser Gleichungen von vornherein zu befriedigen:

$$\psi = h \frac{\partial \omega}{\partial x}, \qquad \chi = h \frac{\partial \omega}{\partial y}.$$

Damit wird aber die zweite Gleichung identisch mit der dritten, d. h. $\omega = \varphi$, womit der Anschluß an die klassische Theorie vollzogen ist.

Die Vernachlässigung der Glieder mit h kann unzulässig werden, wenn man konzentrierte Lasten hat. Beachtenswert ist, daß in der neuen Theorie die Bildung der Spannungsresultanten und -momente sich erübrigt. Das Gleichungssystem (3) gibt über alle Spannungen Aufschluß. Die Spannungen hängen aber nicht mehr unmittelbar und hauptsächlich von φ ab, sondern von ψ und χ. Dies hat zur Folge, daß z. B. bei der eingespannten Platte mit konstanter Last sich das gleiche φ ergibt wie in der klassischen Theorie, die Randspannungen werden aber höher.

4. Zusammenfassung. Ausgehend von einem kinematischen Schema wird eine Methode entwickelt, welche es möglich macht, den Anschluß der technischen Festigkeitslehre an die mathematische Elastizitätstheorie zu bewerkstelligen. Ganz wie in der Methode von *Lagrange* nur mit Kinematik und Energiebegriff gearbeitet wird, werden die Gleichungen aus dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen hergeleitet[1].

Die Randbedingungen brauchen dabei nicht von vornherein im kinematischen Ansatz schon befriedigt zu sein; das Verfahren ist so geartet, daß man das Optimum der Näherung, das sich mit dem gewählten Ansatz überhaupt erreichen läßt, auch wirklich erhält. Von großer praktischer Bedeutung wird die Schubkorrektion dann, wenn es sich um I-Profile handelt. Der Einfluß kann bei handelsüblichen Formen 10 bis 30 % betragen.

(Eingegangen am 29. November 1944.)

[1] Für wertvolle kritische Anregung bei der Behandlung derartiger Probleme bin ich Herrn *R. Kappus* zu Dank verpflichtet.

Inhalt:

	Seite
Grammel, Richard, Die Erklärung des Problems der hohen Sprengfestigkeit umlaufender Scheiben *(Klosterreichenbach, 3. 3. 1889)*	1
Klafke, Willibald, Die Tensorwaage *(Görchen, 17. 8. 1913)*	5
Dietz, Heinrich, Die Lösung des Sechsstabanschlusses mit der Methode der dualen Abbildung *(Habitsheim Kr. Dieburg, 31. 5. 1909)*	14
Tester, Kurt, Beitrag zur Berechnung der hyperbolischen Paraboloidschale *(Teplitz-Schönau, 9. 10. 1891)*	39
Ludwig, Konrad, Das Aufheizen einer Wand durch eine anlaufende Heizanlage *(Breslau, 22. 8. 1898)*	45
Ohlig, Rudolf, Zwei- und vierseitig aufgelagerte Rechteckplatten unter Einzelkraftbelastung *(Offenbach/M., 2. 2. 1901)*	51
Hencky, Heinrich, Über die Berücksichtigung der Schubverzerrung in ebenen Platten *(Ansbach, 2. 11. 1885)*	72

Unveränderter Nachdruck 1975
Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York
Herstellung:
Strauß & Cramer GmbH, 6901 Leutershausen